多元线性回归
Multiple Linear Regression

王树佳 | 深圳大学经济学院

sjwang123@163.com

例1：意大利餐厅的定价策略

纽约两位年轻律师Tim和Nina Zagat计划在曼哈顿的第五大道开一家新的意大利餐厅。

他们的目标定位是：

A. 在食物方面，要“提供最高质量的食品”；
B. 在服务方面，要树立“本地区意大利餐厅服务质量新标准”。

为了给餐厅菜单定价，他们在目标地区组织了一次抽样调查，调查了168位意大利餐厅顾客，得到了消费价格、顾客对食品、装饰、服务的评价等方面的数据。

例1：意大利餐厅的定价策略

Y =Price: 正餐价格（包括饮料）（美元）

X_1=Food: 顾客对食物的评价（总分30分）

X_2=Décor: 顾客对装饰的评价（总分30分）

X_3=Service: 顾客对服务的评价（总分30分）

X_4=East: 餐厅地址（1=在第五大道东边，0=西边）

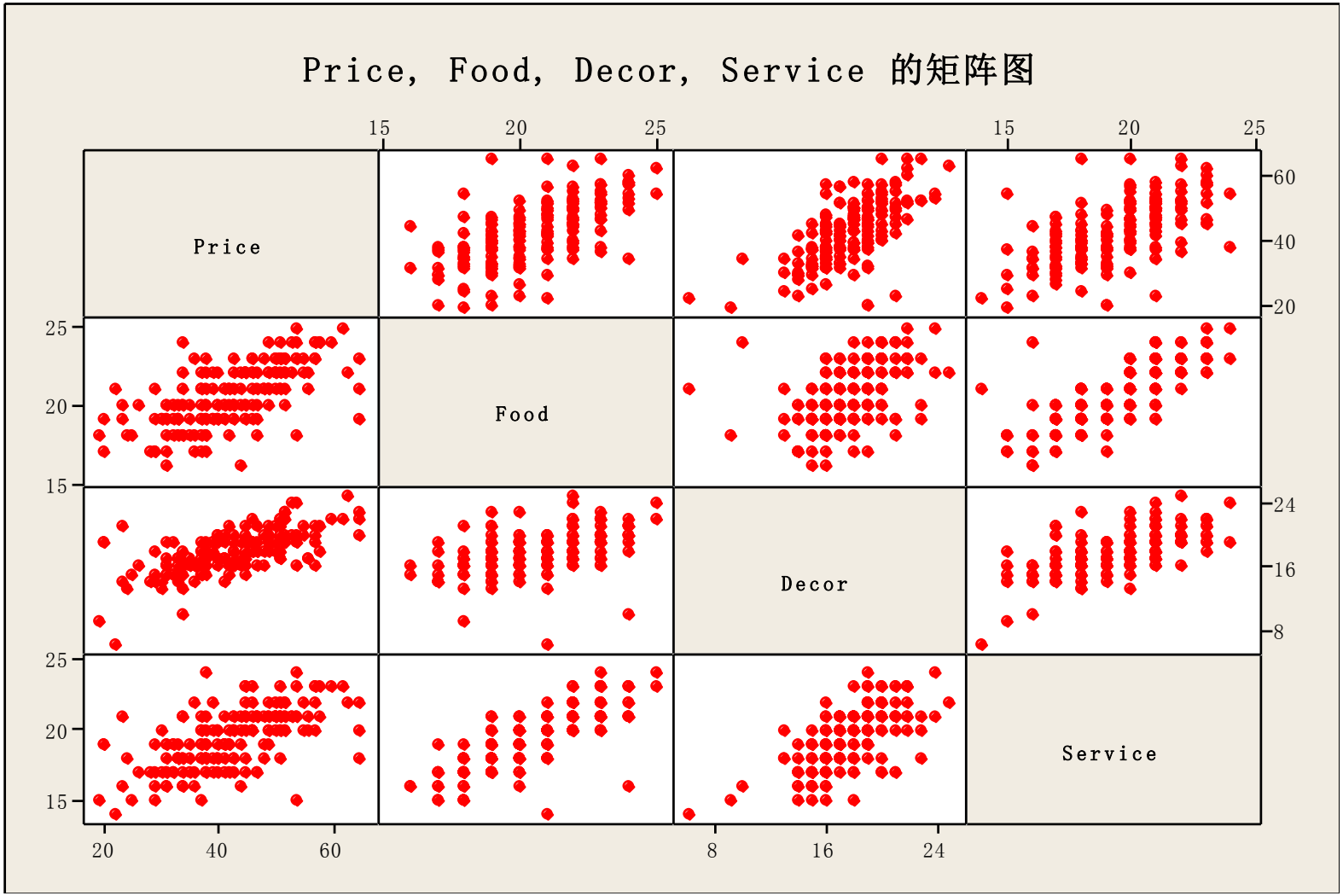
建立模型：研究价格（Price）与Food、Décor、Service和East之间的关系。

例1：意大利餐厅的定价策略

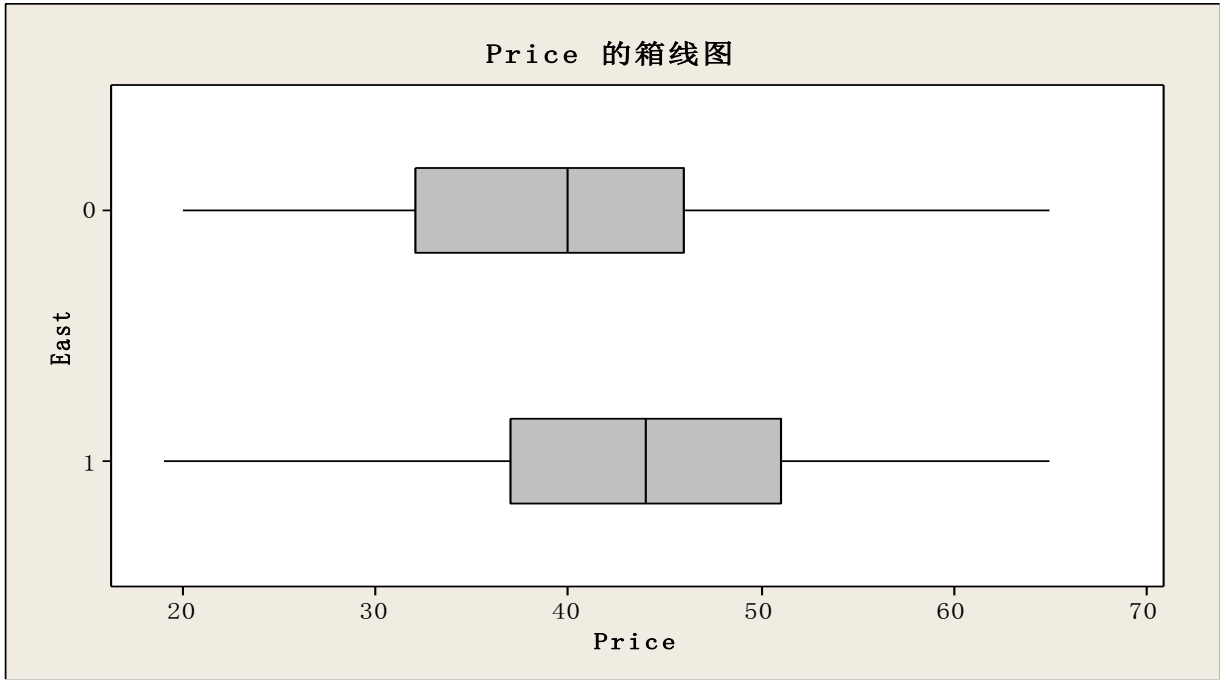
希望回答如下问题：

1. 基于调查数据，如何为菜单确定食品价格？
2. 食物、装饰和服务，哪项对价格影响最大？
3. 为了获得高价，新餐厅应该选在第五大道的东边还是西边？
4. 在服务方面，树立“曼哈顿地区意大利餐厅服务质量的新标准”是否能获得相应的溢价？

描述性分析（散点图矩阵）


Price, Food, Decor, Service 的矩阵图
Price
Food
Decor
Service
15
20
25
60
40
20
25
20
15
24
16
8
25
20
15
20
40
60
8
16
24

描述性分析（箱线图）



描述性分析能否回答餐厅希望知道的四个问题？

Contents

1. 多元线性回归模型：概念
2. 多元线性回归模型：估计
3. 多元线性回归模型：推断

Contents

1. 多元线性回归模型：概念
2. 多元线性回归模型：估计
3. 多元线性回归模型：推断

模型概念

多元回归模型的目的：研究多个自变量与因变量之间的关系（因变量如何受其它因素的影响）。

- 因变量Y：响应变量，被解释变量。
  - ✓ 因变量根据研究目的决定；
- 自变量X_1，X_2，…，X_n：解释变量，预测变量。
  - ✓ 自变量是影响因变量Y的因素。
- **做法**：根据观察数据（y_i,x_i), i=1,2,...,n，估计Y与自变量x_i之间的函数关系。
  - ✓ 如何估计？
  - ✓ 误差如何？

模型概念

多元线性回归模型：

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_p x_p + \epsilon$$

- β_0：截距
- β_i：回归系数，表示在其它因素不变条件下，自变量x_i对因变量的影响大小
- ϵ：随机误差，表示除自变量 $x_1, x_2, \ldots x_p$以外，其它所有可能的因素对Y的综合影响
- 线性：指对参数是线性函数
  - ✓ 如$x_2 = x_1^2$或$x_2 = \ln x_1$仍为线性模型

回归模型的函数形式

A. 线性模型

wage = - 4.474 + 1.281 education

- Wage：时薪; Education：受教育年限
- 回归系数的解释：受教育年限每增加1年，工人的时薪平均增加1.281美元

□ 一般：$y = \beta_0 + \beta_1 x$

解释：x增加一个单位，y增加β_1个单位。

推导：$dy = d(\beta_o + \beta_1 x) = \beta_1 dx$

□ 不合理之处：受教育年限为10和20时是一样的

回归模型的函数形式

B. 半对数模型

ln(wage) = 1.116 + 0.093education

- 回归系数的解释：受教育年限每增加1年，工人的时薪平均增加9.3%美元

□ 一般：$\ln(y) = \beta_0 + \beta_1 x$

解释：x增加一个单位，y增加$100\beta_1$%。

推导：$d\ln(y) = d(\beta_o + \beta_1 x)$, $\frac{dy}{y} = \beta_1 dx$

即 $\%dy = (100\beta_1)dx$

回归模型的函数形式

C. Lin-Log模型

Engel = 0.93 - 0.8 ln(Expend)

- 回归系数的解释：家庭总支出每增加1%，恩格尔系数将减小0.008.

□ 一般：$y = \beta_0 + \beta_1 \ln(x)$

解释：x增加1%，y增加 $0.01\beta_1$个单位。

推导：

$$dy = d(\beta_o + \beta_1 \ln(x))$$

$$= \beta_1 \frac{dx}{x} = (0.01\beta_1)\%dx$$

回归模型的函数形式

D. 对数模型

著名的Cobb-Douglas生产函数：$Q = AL^a K^b$

其中Q为产出，L为劳动投入，K为资本，A为常数。

化为线性模型：$\ln Q = C + a \ln L + b \ln K$

□ 一般：$\ln(y) = \beta_0 + \beta_1 \ln(x)$

解释：β_1为y对x的弹性(elasticity)，即：x增加1%，y增加 β_1%。

推导：

$$d \ln y = d(\beta_o + \beta_1 \ln x)$$

$$\frac{dy}{y} = \beta_1 \frac{dx}{x}$$

Contents

1. 多元线性回归模型：概念
2. 多元线性回归模型：估计
3. 多元线性回归模型：推断

模型假设

1. 线性(Linearity)：因变量与自变量之间存在线性关系
2. 零均值：误差项ϵ的平均值（数学期望）为0
3. 同方差性，或方差齐性（Homoscedasticity)：误差项ϵ_i的方差为常数（不同的观察值）
4. 独立性：不同数值下，误差项ϵ_i相互独立
5. 正态性：误差项ϵ服从正态分布
6. 自变量之间不存在共线性(Collinearity)：自变量中没有常数变量，且自变量之间不存在线性关系

数据

样本序号	x_1	x_2	…	x_p	y
1	x_{11}	x_{21}	…	x_{p1}	y_1
2	x_{12}	x_{22}	…	x_{p2}	y_2
…	…	…	…	…	…
n	x_{1n}	x_{2n}	…	x_{pn}	y_n

数据模型

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_p x_{ip} + \epsilon_i$$

其中 $\epsilon_i \sim iidN(0, \sigma^2), i = 1,2, \ldots, n$

多元线性回归模型：估计

1. 系数估计
   - ✓ 最小二乘法：LSE
   - ✓ 最大似然法：MLE
2. 估计精度
   - ✓ 误差的方差
   - ✓ 标准误
3. 拟合优度
   - ✓ 判定系数R^2

估计：最小二乘法（OLS）

最小二乘法：使误差平方和$\sum(y_i - \hat{y}_i)^2$最小

Min $\sum\left[y_i - \left(\beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_p x_{ip}\right)\right]^2$

- 需估计系数$\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p$和方差$\sigma^2$
- 系数估计量记为：$b_0, b_1, \ldots, b_p$
- $\hat{y}_i = b_0 + b_1 x_{i1} + \cdots + b_p x_{ip}$称为回归方程
- $e_i = y_i - \hat{y}_i$称为残差(Residual)
- 统计软件（Minitab，SPSS，SAS…）
- OLS是一种估计方法，不是OLS模型！

估计：最大似然法（MLE）

最大似然估计：使似然函数最大

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_p x_{ip} + \epsilon_i$$

$$Y_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)$$

其中 $\mu_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \cdots + \beta_p x_{ip}$

似然函数

$$L(\beta, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-\mu_i)^2}{2\sigma^2}}$$

例1：意大利餐厅的定价策略

回归分析: Price 与 Food, Decor, Service, East

回归方程为

Price = - 24.2 + 1.55 Food + 1.90 Decor + 0.005 Service + 2.00 East

自变量	系数	系数标准误	T	P
常量	-24.244	4.758	-5.10	0.000
Food	1.5539	0.3727	4.17	0.000
Decor	1.8979	0.2191	8.66	0.000
Service	0.0053	0.3995	0.01	0.989
East	2.0034	0.9618	2.08	0.039

S = 5.77649　R-Sq = 62.7%　R-Sq（调整） = 61.8%

方差分析

来源	自由度	SS	MS	F	P
回归	4	8991.8	2248.0	67.37	0.000
残差误差	160	5338.9	33.4		
合计	164	14330.7			

例1：意大利餐厅的定价策略

- ✓ 因为顾客对食品、装饰、服务的评价都是30分制，所以系数大小可以对比；
- ✓ 装饰（Décor）对价格影响最大：系数为1.90，表示顾客对装饰的评价每提高1分，食品价格平均提高1.90美元；
- ✓ 服务（Service）对价格影响最小：系数仅为0.005，表示顾客对服务的评价每提高1分，食品价格平均仅提高0.005美元；
- ◘ 问题是：此回归方程是否能真正用于决策？

精度：误差的方差和标准误

- 系数的估计：估计了均值
  $E(Y|x) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_p x_p$

- 最近很时髦的词汇：
  精准医疗，精准扶贫。。。
- 现在，我们要精准估计，精准预测，看什么？

- 精度：看$\epsilon \sim N(0, \sigma^2)$的方差$\sigma^2$！

精度：误差的方差和标准误

y的总平方和(SST) = 被回归方程所解释的变异(SSR)
+ 未能被回归方程解释的变异(SSE)

$$SST = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$$

$$SSR = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

$$SSE = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$$

- σ^2的无偏估计：$\hat{\sigma}^2 = \frac{SSE}{n-p-1}$
- $\hat{\sigma} = \sqrt{\hat{\sigma}^2}$ 称为估计的标准误(Standard Error)

拟合优度：判定系数

判定系数(Coefficient of Determination)：

$$R^2 = \frac{SSR}{SST}$$

- R^2反映因变量的总变动中由自变量所解释部分所占的百分比
- R^2反映线性模型拟合的好坏程度
- R^2反映线性模型的预测能力

拟合优度：判定系数

调整的判定系数(Adjusted R^2)：

$$R^2_{adj} = 1 - \frac{SSE/(n-p-1)}{SST/(n-1)}$$

$$R^2_{adj} = 1 - (1 - R^2) \times \frac{n-1}{n-p-1}$$

- 增加与Y无关的自变量，R^2_{adj}不变
- 多元线性回归要看R^2_{adj}

例1：意大利餐厅的定价策略

回归分析: Price 与 Food, Decor, Service, East

回归方程为

Price = - 24.2 + 1.55 Food + 1.90 Decor + 0.005 Service + 2.00 East

自变量	系数	系数标准误	T	P
常量	-24.244	4.758	-5.10	0.000
Food	1.5539	0.3727	4.17	0.000
Decor	1.8979	0.2191	8.66	0.000
Service	0.0053	0.3995	0.01	0.989
East	2.0034	0.9618	2.08	0.039

S = 5.77649　R-Sq = 62.7%　R-Sq（调整） = 61.8%

方差分析

来源	自由度	SS	MS	F	P
回归	4	8991.8	2248.0	67.37	0.000
残差误差	160	5338.9	33.4		
合计	164	14330.7			

Contents

1. 多元线性回归模型：概念
2. 多元线性回归模型：估计
3. 多元线性回归模型：推断

多元线性回归模型：推断

A. 显著性检验

1. 回归方程的显著性检验：F-检验
   - ✓ 自变量整体上对Y是否有显著解释力
   - ✓ 回归系数不能全部等于0
2. 回归系数的显著性检验：t-检验
   - ✓ 检验每个自变量对Y是否有显著影响
   - ✓ 即检验它们的系数是否等于0

B. 预测

多元线性回归模型：推断

A. 显著性检验

1. 回归方程的显著性检验：F-检验
   - ✓ 自变量整体上对Y是否有显著解释力
   - ✓ 回归系数不能全部等于0
2. 回归系数的显著性检验：t-检验
   - ✓ 检验每个自变量对Y是否有显著影响
   - ✓ 即检验它们的系数是否等于0

B. 预测

回归方程的显著性检验：F-检验

回归方程检验或总体显著性检验

(test for overall significance)

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_p x_p + \varepsilon$$

$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_p = 0$

$H_1: \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$至少有一个不等于0

回归方程的显著性检验：F-检验

在多元线性回归模型中，一般需要给出方差分析表(Analysis of Variance, ANOVA):

来源	**自由度**	**SS**	**MS**	**F**
回归	p	SSR	$MSR=SSR/p$	$F=MSR/MSE$
误差	$n-p-1$	SSE	$MSE=SSE/(n-p-1)$	
合计	$n-1$	SST		

回归方程的显著性检验：F-检验

F-检验（总体显著性检验）的关键步骤：

1、假设：要检验整个回归方程是否显著

$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_p = 0$

$H_1: \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$至少有一个不等于0

2、检验统计量：$F = MSR/MSE$

3、判断规则：对于给定显著性水平α，(0.05，0.01)

- ✓ 如果p-值≤α，拒绝H_0，回归方程显著
- ✓ 如果p-值>α，接受H_0，回归方程不显著

例1：意大利餐厅的定价策略

回归分析: Price 与 Food, Decor, Service, East

回归方程为

Price = - 24.2 + 1.55 Food + 1.90 Decor + 0.005 Service + 2.00 East

自变量	系数	系数标准误	T	P
常量	-24.244	4.758	-5.10	0.000
Food	1.5539	0.3727	4.17	0.000
Decor	1.8979	0.2191	8.66	0.000
Service	0.0053	0.3995	0.01	0.989
East	2.0034	0.9618	2.08	0.039

S = 5.77649　R-Sq = 62.7%　R-Sq（调整） = 61.8%

方差分析

来源	自由度	SS	MS	F	P
回归	4	8991.8	2248.0	67.37	0.000
残差误差	160	5338.9	33.4		
合计	164	14330.7			

回归系数的显著性检验：t-检验

t-检验（单个自变量显著性检验）的关键步骤：

1、假设：要检验第i个自变量是否显著

$$H_0: \beta_i = 0 \qquad H_1: \beta_i \neq 0$$

2、检验统计量：$t = \frac{b_i}{S_{b_i}} \sim t(n-p-1)$

- ✓ b_i为回归方程中第i个自变量系数β_i的估计量
- ✓ S_{b_i}为b_i的标准差的估计量（也叫系数标准误）

3、判断规则：对于给定显著性水平α，(0.05，0.01)

- ✓ 如果p-值≤α，拒绝H_0，该自变量显著
- ✓ 如果p-值>α，接受H_0，该自变量不显著

例1：意大利餐厅的定价策略

回归分析: Price 与 Food, Decor, Service, East

回归方程为

Price = - 24.2 + 1.55 Food + 1.90 Decor + 0.005 Service + 2.00 East

自变量	系数	系数标准误	T	P
常量	-24.244	4.758	-5.10	0.000
Food	1.5539	0.3727	4.17	0.000
Decor	1.8979	0.2191	8.66	0.000
Service	0.0053	0.3995	0.01	0.989
East	2.0034	0.9618	2.08	0.039

S = 5.77649　R-Sq = 62.7%　R-Sq（调整） = 61.8%

方差分析

来源	自由度	SS	MS	F	P
回归	4	8991.8	2248.0	67.37	0.000
残差误差	160	5338.9	33.4		
合计	164	14330.7			

例1：意大利餐厅的定价策略

1. 基于调查数据，如何为菜单确定食品价格？

回归方程：

Price=- 24.2+1.55Food+1.90Decor+0.005Service+2.00East

- 能否用于预测食品价格？
- 答：还不能用于预测食品价格，因为没有经过检验

例1：意大利餐厅的定价策略

2. 食物、装饰和服务，哪项对价格影响最大？

✌ 答：装饰（Décor）对价格影响最大，因为其系数最大，t-检验的p-值表明其高度显著

例1：意大利餐厅的定价策略

3.为了获得高价，新餐厅应该选在第五大道的东边还是西边？

- 答：East的t-检验p-值=0.039<0.05，表明其对食品价格有显著影响。系数=2，表明在第五大道的东边(East=1)平均比西边价格高2美元。

例1：意大利餐厅的定价策略

4. 在服务方面，树立“曼哈顿地区意大利餐厅服务质量的新标准”是否能获得相应的溢价？

✌ 答：想通过提高服务标准获得溢价，这个目标恐怕难以实现。因为Service对价格的影响很小且不显著

多元线性回归模型：推断

A. 显著性检验

1. 回归方程的显著性检验：F-检验
   - ✓ 自变量整体上对Y是否有显著解释力
   - ✓ 回归系数不能全部等于0
2. 回归系数的显著性检验：t-检验
   - ✓ 检验每个自变量对Y是否有显著影响
   - ✓ 即检验它们的系数是否等于0

B. 预测

多元线性回归模型：推断

A. 显著性检验

1. 回归方程的显著性检验：F-检验
   - ✓ 自变量整体上对Y是否有显著解释力
   - ✓ 回归系数不能全部等于0
2. 回归系数的显著性检验：t-检验
   - ✓ 检验每个自变量对Y是否有显著影响
   - ✓ 即检验它们的系数是否等于0

B. 预测

例1：意大利餐厅的定价策略

由于Service不显著，回归方程中应予以剔除。

回归分析: Price 与 Food, Decor, East

回归方程为

Price = - 24.2 + 1.56 Food + 1.90 Decor + 2.01 East

自变量	系数	系数标准误	T	P
常量	-24.238	4.723	-5.13	0.000
Food	1.5574	0.2662	5.85	0.000
Decor	1.8993	0.1917	9.91	0.000
East	2.0055	0.9458	2.12	0.035

S = 5.75853　R-Sq = 62.7%　R-Sq（调整） = 62.1%

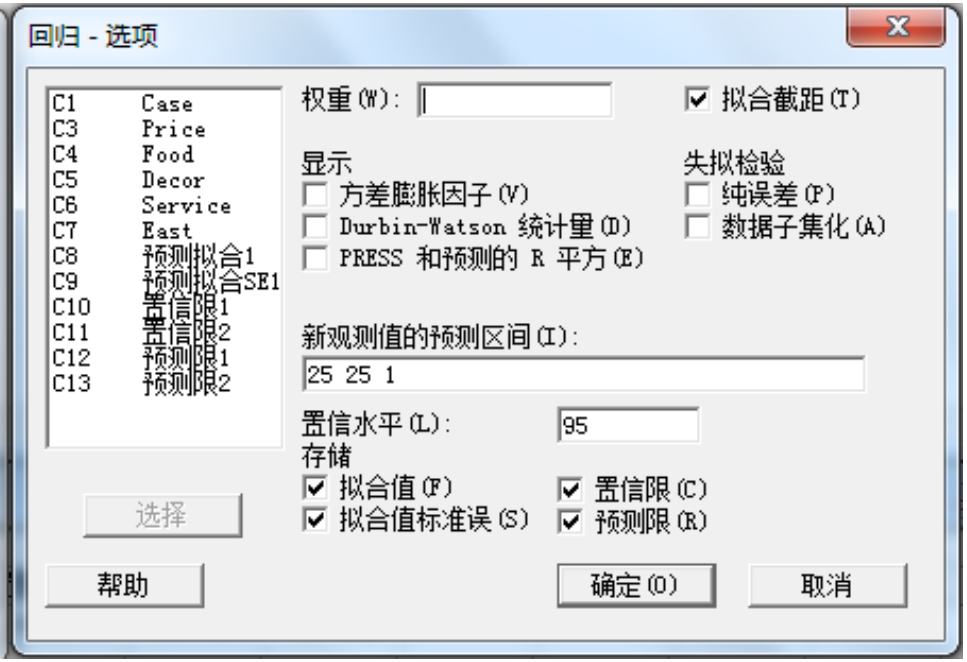
方差分析

来源	自由度	SS	MS	F	P
回归	3	8991.8	2997.3	90.39	0.000
残差误差	161	5338.9	33.2		
合计	164	14330.7			

例1：意大利餐厅的定价策略

Food和Décor的最大得分都是25，在第五大道东边开店的话，预测定价的回归方程为：

Price = - 24.2 + 1.56 Food + 1.90 Decor + 2.01 East



例1：意大利餐厅的定价策略

新观测值的预测值

新观测值	拟合值	标准误	95% 置信区间	95% 预测区间
1	64.185	1.384	(61.452, 66.918)	(52.489, 75.881)

新观测值的自变量值

新观测值	Food	Decor	East
1	25.0	25.0	1.00

1. 概念
   A. 目的？
   B. 如何确定因变量、自变量？
   C. 不同函数形式：系数的意义？

2. 估计
   A. 模型假设
   B. 回归系数的估计方法
   C. 误差估计
   D. 拟合优度

3. 推断
   A. 显著性检验
      a) 各个自变量的系数的检验
      b) 回归方程的检验
   B. 预测

讨论：如何报告多元回归模型的结果？

在实证研究中，要撰写多元线性回归的分析报告，需要报告哪些内容？