线性规划模型

王树佳 | 深圳大学经济学院
sjwang123@163.com

“经济学中有两个基本原理，对这两个原理的掌握和理解程度能反映一个经济学者的水平。
其一，是约束条件下的极大化；
其二，是在一般情况下需求曲线斜率为负。”

张五常
著名经济学家
香港大学经济金融学院院长

本章目的

1. 建立一般线性规划模型
2. 建立对应电子表格模型
3. 运用Excel求解（规划求解）

Contents

问题

荔园公司提供三种口味的冰淇淋： 巧克力、 香草和香蕉。由于天气酷热，需求猛增，公司已面临牛奶、 糖、 奶油原料短缺问题。在这种情况下，公司应如何科学安排每种口味的冰淇淋产量，在约束下达到利润最大化？

已知销售每加仑巧克力、香草和香蕉口味的冰淇淋可获得利润$1、$0.90和$0.95，目前公司库存还有 2000 加仑的牛奶，1500镑的糖和600加仑的奶油。

每生产1加仑巧克力冰淇淋需要0.45加仑牛奶，0.5磅糖和0.1加仑奶油；每生产1加仑香草冰淇淋需要0.5加仑牛奶，0.4磅糖和0.15加仑奶油；每生产1加仑香蕉冰淇淋需要0.4加仑牛奶，0.4磅糖和0.2加仑奶油。

因为巧克力冰淇淋是最好销的，公司希望保证最少500加仑巧克力冰淇淋，而香草冰淇淋则要求不超过2000加仑。

线性规划模型(Linear Programming)

决策变量：

X1=巧克力口味的冰淇淋数量

X2=香草口味的冰淇淋数量

X3=香蕉口味的冰淇淋数量

目标：

利润 Z=X1+0.90X2+0.95X3最大

约束条件：

0.45X1+0.5X2+0.4X3≤2000 牛奶

0.5 X1+0.4X2+0.4X3≤1500 糖

0.1X1+0.15X2+0.2X3≤600 奶油

X1≥500 巧克力冰淇淋

X2≤2000 香草冰淇淋

X1≥0，X2≥0，X2≥0 非负

Contents

Excel求解（电子表格模型）

电子表格模型：

- 指定决策变量，目标函数和约束条件

模型求解：

- 规划求解(英文版：Solver)，首次使用需安装（加载宏）

结果输出：

- 运算结果报告；敏感性报告；极限值报告

设计：电子表格模型

	A	B	C	D	E	F	G
1	**决策变量**						
2	口味	**巧克力**	**香草**	**香蕉**			
3	数量	0	0	0			
4	利润	1	0.9	0.95			
5							
6	**目标函数**	Z =	=SUMPRODUCT(B3:D3,B4:D4)				
7							
8	**约束**						
9		**巧克力**	**香草**	**香蕉**	**实际**		**约束值**
10	牛奶	0.45	0.5	0.4	=SUMPRODUCT(B10:D10,$B$3:$D$3)	<=	2000
11	糖	0.5	0.4	0.4	=SUMPRODUCT(B11:D11,$B$3:$D$3)	<=	1500
12	奶油	0.1	0.15	0.2	=SUMPRODUCT(B12:D12,$B$3:$D$3)	<=	600
13	巧克力冰淇淋最小数量				=B3	>=	500
14	香草冰淇淋最大数量				=C3	<=	2000

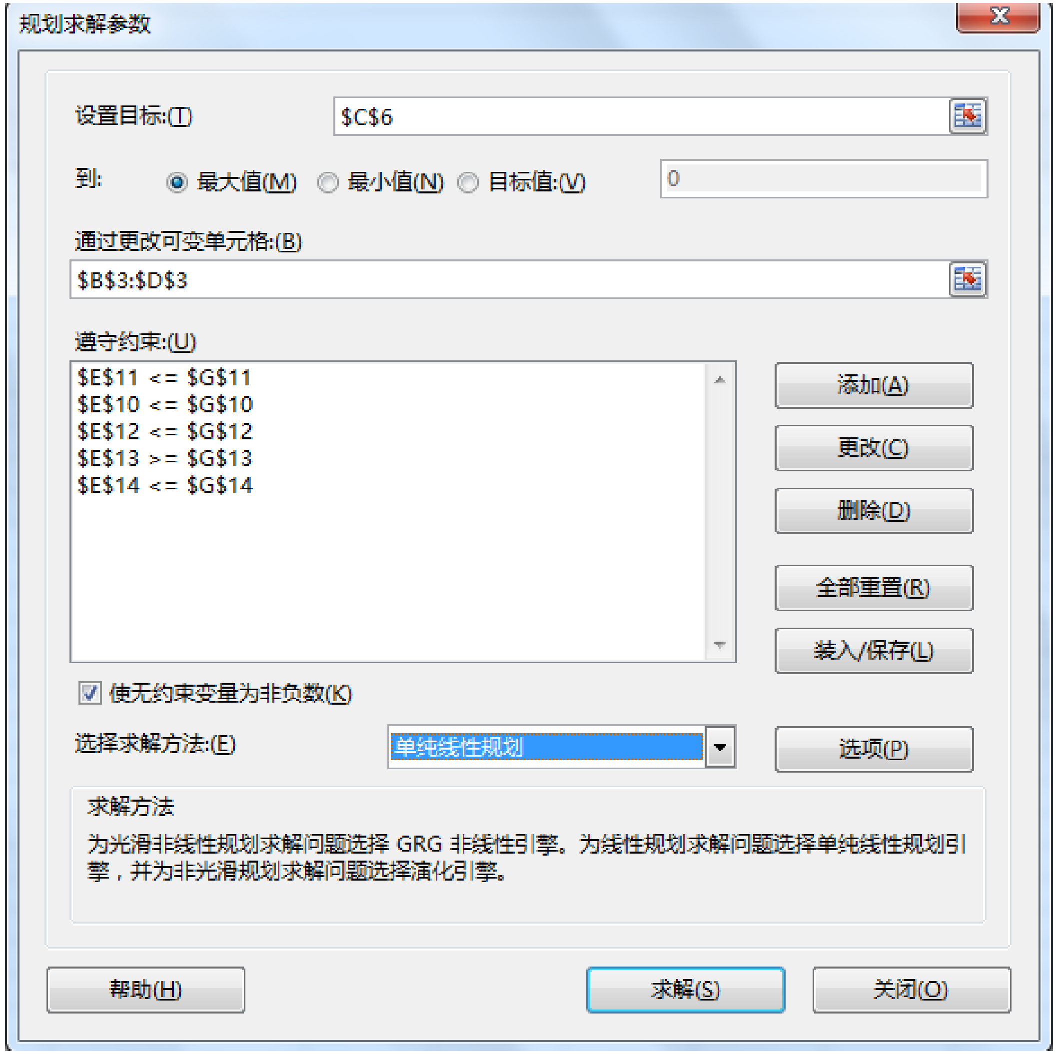
Excel求解（电子表格模型）

操作：

数据=>规划求解

分别指定：

1. 目标单元格：目标函数
2. 可变单元格：决策变量
3. 约束条件：添加约束关系



求解结果

公司的最优生产计划是：

- 巧克力口味500加仑
- 香草口味1500加仑
- 香蕉口味1625加仑

最大利润：$3393.75。

	A	B	C	D	E	F	G
1	**决策变量**						
2	口味	**巧克力**	**香草**	**香蕉**			
3	数量	500	1500	1625			
4	利润	1	0.9	0.95			
5							
6	**目标函数**	Z =	3393.75				
7							
8	**约束**						
9		**巧克力**	**香草**	**香蕉**	**实际**		**约束值**
10	牛奶	0.45	0.5	0.4	1625	<=	2000
11	糖	0.5	0.4	0.4	1500	<=	1500
12	奶油	0.1	0.15	0.2	600	<=	600
13	巧克力冰淇淋最小数量				500	>=	500
14	香草冰淇淋最大数量				1500	<=	2000

Contents

线性规划模型的敏感性分析

由于外部环境的不确定性，模型的输入项会随时变化。

- **资源约束条件发生改变**：牛奶库存量由2000 增加到2500加仑。
  - 约束值改变
- **市场条件改变**：市场受供求影响，导致单位产品的利润发生变化，如香草冰淇淋的单位利润从$0.9增加到1.5元。
  - 目标函数系数改变

企业的最优生产组合是否要调整？

最大利润是否会发生改变？

一、资源约束的敏感性分析

紧约束: Binding Constraint

对于一个约束条件，若增加（或减少）1个单位的资源，将会导致目标值增加(或降低)，该约束的资源限制在最大化目标下达到了边界值，称该约束为紧约束(Binding)，否则，称为非紧约束。

	A	B	C	D	E	F	G
1	**决策变量**						
2	口味	**巧克力**	**香草**	**香蕉**			
3	数量	500	1500	1625			
4	利润	1	0.9	0.95			
5							
6	**目标函数**	Z =	3393.75				
7							
8	**约束**						
9		**巧克力**	**香草**	**香蕉**	**实际值**		**约束值**
10	牛奶	0.45	0.5	0.4	1625	<=	2000
11	糖	0.5	0.4	0.4	1500	<=	1500
12	奶油	0.1	0.15	0.2	600	<=	600
13	巧克力冰淇淋最小数量				500	>=	500
14	香草冰淇淋最大数量				1500	<=	2000

松弛量(Slack)和剩余量(Surplus)

松弛量(Slack)：

在最优解下， 牛奶实际消耗量为1625，还差375加仑没有达到约束值。 则称牛奶约束的

松弛量(Slack)为375加仑。

剩余量(Surplus)：

如果巧克力冰淇淋实际数量为550，超过最小约束值500，超出部分（即50）称为剩余量(Surplus)。

	A	B	C	D	E	F	G
1	**决策变量**						
2	口味	**巧克力**	**香草**	**香蕉**			
3	数量	500	1500	1625			
4	利润	1	0.9	0.95			
5							
6	**目标函数**	Z =	3393.75				
7							
8	**约束**						
9		**巧克力**	**香草**	**香蕉**	**实际值**		**约束值**
10	牛奶	0.45	0.5	0.4	1625	<=	2000
11	糖	0.5	0.4	0.4	1500	<=	1500
12	奶油	0.1	0.15	0.2	600	<=	600
13	巧克力冰淇淋最小数量				500	>=	500
14	香草冰淇淋最大数量				1500	<=	2000

影子价格与对偶价格

奶油是紧约束，约束值为600加仑。如果在市场上可以用$2/加仑的价格搞到额外的奶油，是否要进货？

需考虑：奶油约束值每增加1加仑，目标函数值（最大利润）会增加多少？

	A	B	C	D	E	F	G
1	决策变量						
2	口味	巧克力	香草	香蕉			
3	数量	500	1500	1625			
4	利润	1	0.9	0.95			
5							
6	目标函数	Z =	3393.75				
7							
8	约束						
9		巧克力	香草	香蕉	实际值		约束值
10	牛奶	0.45	0.5	0.4	1625	<=	2000
11	糖	0.5	0.4	0.4	1500	<=	1500
12	奶油	0.1	0.15	0.2	600	<=	600
13	巧克力冰淇淋最小数量				500	>=	500
14	香草冰淇淋最大数量				1500	<=	2000

影子价格与对偶价格

影子价格（Shadow Price）:

资源约束（约束右边数值）增加1个单位所引起的**目标函数值**的**改变量**。

对偶价格（Dual Price）:

资源约束（约束右边数值）增加1个单位所引起的**目标函数值**的**改进量**。

对最大化问题：两者相同

对最小化问题：影子价格等于对偶价格的负数。

影子价格与对偶价格

Microsoft Excel 15.0 敏感性报告
工作表：[lp.xls]ice-cream (3)
报告的建立：2016/3/8 13:56:46

可变单元格

单元格	名称	终值	递减成本	目标式系数	允许的增量	允许的减量
$B$3	数量 巧克力	500	0	1	0.0375	1E+30
$C$3	数量 香草	1500	0	0.9	0.05	0.0125
$D$3	数量 香蕉	1625	0	0.95	0.021428571	0.05

约束

单元格	名称	终值	阴影价格	约束限制值	允许的增量	允许的减量
$E$11	糖 实际值	1500	1.875	1500	50	150
$E$10	牛奶 实际值	1625	0	2000	1E+30	375
$E$12	奶油 实际值	600	1	600	75	25
$E$13	巧克力冰淇淋最小数量 实际值	500	-0.0375	500	500	166.6666667
$E$14	香草冰淇淋最大数量 实际值	1500	0	2000	1E+30	500

资源约束的变化范围

为什么要研究资源约束的变化范围？

　作为经理，你奶油的影子价格为$1，如果购买奶油的成本是$0.5，意味着每购买1加仑可以多赚0.5美元。那么你会尽可能购买更多的奶油(称为放松约束)。

- 多购买1加仑，利润增加0.5美元；
- 多购买2加仑，利润增加2×0.5美元；
- 多购买100000加仑？

所谓**资源约束的允许变化范围**，是指：

资源约束在什么变化范围内变化时，影子价格是不变的？

资源约束的变化范围

资源约束允许的变化范围：

糖：(1500-150, 1500+50)

牛奶: (2000-375, +∞)

Microsoft Excel 15.0 敏感性报告

工作表: [lp.xls]ice-cream (3)

报告的建立: 2016/3/8 13:56:46

可变单元格

单元格	名称	终值	递减成本	目标式系数	允许的增量	允许的减量
$B$3	数量 巧克力	500	0	1	0.0375	1E+30
$C$3	数量 香草	1500	0	0.9	0.05	0.0125
$D$3	数量 香蕉	1625	0	0.95	0.021428571	0.05

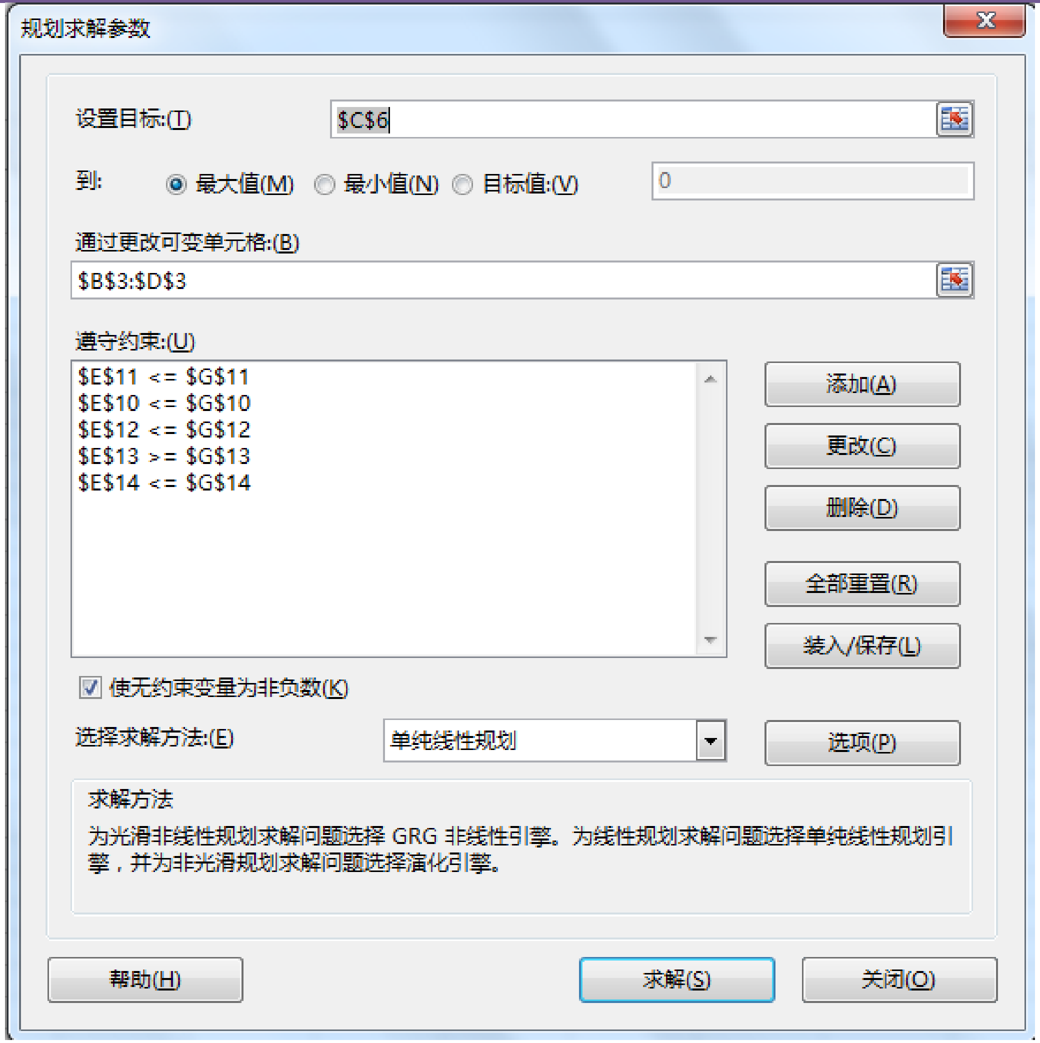
约束

单元格	名称	终值	阴影价格	约束限制值	允许的增量	允许的减量
$E$11	糖 实际值	1500	1.875	1500	50	150
$E$10	牛奶 实际值	1625	0	2000	1E+30	375
$E$12	奶油 实际值	600	1	600	75	25
$E$13	巧克力冰淇淋最小数量 实际值	500	-0.0375	500	500	166.6666667
$E$14	香草冰淇淋最大数量 实际值	1500	0	2000	1E+30	500

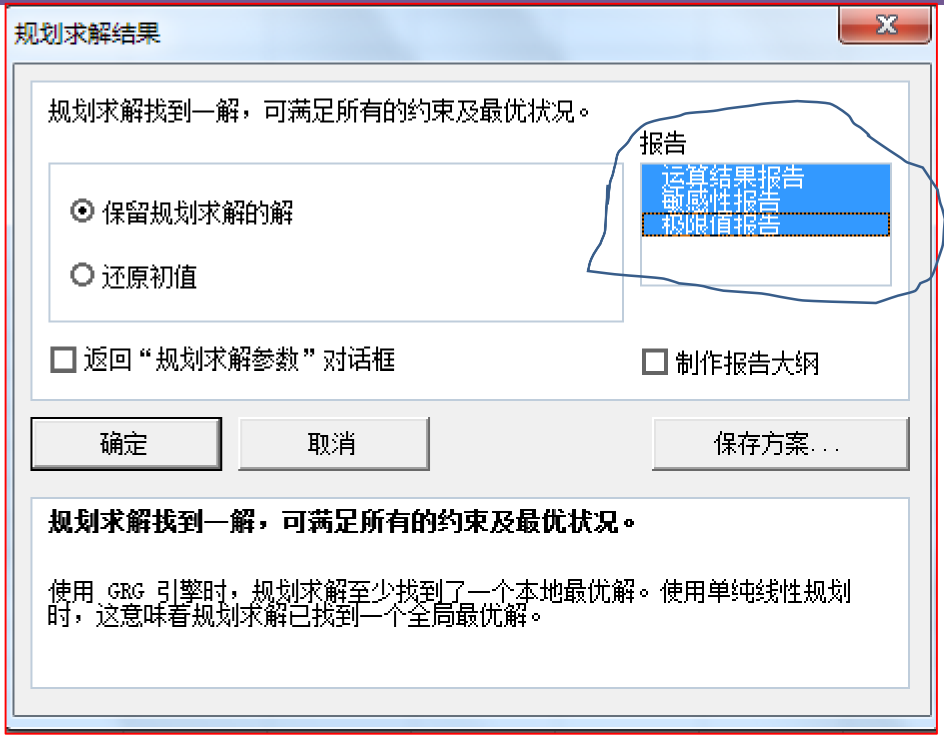
问题：

- 在允许范围内，最优解是否改变？
- 在允许范围内，最优目标函数值是否改变？
- 什么不变？

敏感性分析：操作



规划求解参数
设置目标:(T)
$C$6
到:
最大值(M)
最小值(N)
目标值:(V)
0
通过更改可变单元格:(B)
$B$3:$D$3
遵守约束:(U)
$E$11 <= $G$11
$E$10 <= $G$10
$E$12 <= $G$12
$E$13 >= $G$13
$E$14 <= $G$14
添加(A)
更改(C)
删除(D)
全部重置(R)
装入/保存(L)
使无约束变量为非负数(K)
选择求解方法:(E)
单纯线性规划
选项(P)
求解方法
为光滑非线性规划求解问题选择 GRG 非线性引擎。为线性规划求解问题选择单纯线性规划引擎，并为非光滑规划求解问题选择演化引擎。
帮助(H)
求解(S)
关闭(O)



规划求解结果
规划求解找到一解，可满足所有的约束及最优状况。
报告
运算结果报告
敏感性报告
极限值报告
保留规划求解的解
还原初值
返回“规划求解参数”对话框
制作报告大纲
确定
取消
保存方案...
规划求解找到一解，可满足所有的约束及最优状况。
使用 GRG 引擎时，规划求解至少找到了一个本地最优解。使用单纯线性规划时，这意味着规划求解已找到一个全局最优解。

二、目标函数系数的变化范围

目标函数系数的变化范围

为什么要研究目标函数系数的变化范围？

公司的最优生产计划是：巧克力口味500加仑，香草口味1500加仑，香蕉口味1625加仑。最大利润：$3393.75。

假如市场环境改变了，市面上巧克力口味冰淇淋大减价，单位利润由原来的$1下跌到$0.5，可能还要继续下跌。 作为企业老板，你的生产计划是否需要调整？

目标函数系数的变化范围

为什么要研究目标函数系数的变化范围？

公司的最优生产计划是：巧克力口味500加仑，香草口味1500加仑，香蕉口味1625加仑。最大利润：$3393.75。

换个角度问：

巧克力口味冰淇淋的单位利润（价格）在什么范围内变化时，企业的生产计划不需要调整？（超出这个范围才需要调整）

目标函数系数的允许变化范围是指：

目标函数系数在什么范围内变化时，线性规划的**最优解**保持不变？

目标函数系数的变化范围

目标函数系数的变化范围

巧克力味：(-∞, 1.0375)

香草味：

（0.9-0.0125，0.9+0.05）

香蕉味：

(0.95-0.05, 0,95+0.214)

解释：如果巧克力味冰淇淋的单位利润不超过$1.0375（其它口味冰淇淋价格不变），则企业最优生产组合不变。

Microsoft Excel 15.0 敏感性报告
工作表: [lp.xls]ice-cream (3)
报告的建立: 2016/3/8 13:56:46

可变单元格

单元格	名称	终值	递减成本	目标式系数	允许的增量	允许的减量
$B$3	数量 巧克力	500	0	1	0.0375	1E+30
$C$3	数量 香草	1500	0	0.9	0.05	0.0125
$D$3	数量 香蕉	1625	0	0.95	0.021428571	0.05

约束

单元格	名称	终值	阴影价格	约束限制值	允许的增量	允许的减量
$E$11	糖 实际值	1500	1.875	1500	50	150
$E$10	牛奶 实际值	1625	0	2000	1E+30	375
$E$12	奶油 实际值	600	1	600	75	25
$E$13	巧克力冰淇淋最小数量 实际值	500	-0.0375	500	500	166.6666667
$E$14	香草冰淇淋最大数量 实际值	1500	0	2000	1E+30	500

多个目标函数系数同时变化

百分之百法则：

若多个目标函数系数同时变化，计算每一个系数的变化量占单独考虑时允许变动量（增加和减少的）的百分比，然后相加。

如果所得之和不超过100%，则最优解不变；否则，不能确定。

前提：其它条件假设不变

多个资源约束值同时变化

百分之百法则：

若多个约束右边数值同时变化，计算每一个常数值的变化量占单独考虑时允许变动量（增加和减少的）的百分比，然后相加。

如果所得之和不超过100%，则约束资源的影子价格不变；否则，不能确定。

前提：其它条件假设不变

百分之百法则注意事项

1.若约束常数值与目标函数系数同时变化，则不能应用百分之百法则

2.百分之百法则是判断最优解或影子价格是否变化的充分条件，不是必要条件。

即：不超过100%，最优解或影子价格不变；超过100%，不能确定。

3.当允许增加（减少）量为无穷大时，允许增加（减少）百分比为0.

课堂讨论

公司老板认为，因为巧克力口味冰淇淋的单位利润最大，其最低产量应由500加仑提高到800加仑。

1. 你认为老板的意见是否正确？为什么？
2. 假如按老板的意见实施生产，最大利润会改变为多少？

Contents

案例1：广告策略

某俱乐部推广一项从中西部城市到巴哈马赌场的博彩。俱乐部每周用于地方广告的预算为8000美元。广告预算将分配给四种促销媒体：电视短片、报纸广告和两种电台广告。该俱乐部的目标是通过各种媒体覆盖到更多的高购买潜力的受众。

媒体	每条广告受众	每条广告的成本（美元）	每周最大广告量
电视短片（1分钟）	5000	800	12
日报（整页广告）	8500	925	5
电台广告片段（30秒，黄金时间）	2400	290	25
电台广告片段（1分钟，下午）	2800	380	20

该俱乐部的合同安排要求每周至少播放5条电台广告片段。为了扩大促销竞争的影响范围，管理层还决定每周最多在电台广告方面投资1800美元。

决策变量：

X1=每周1分钟短片的投放数量

X2=每周整页日报广告的投放数量

X3=每周30秒黄金时间电台广告的投放数量

X4=每周下午时段1分钟电台广告的投放数量

目标：最大化广告覆盖范围=5000 X1 +8500 X2 +2400 X3+2800 X4

约束条件：

X1 ≤12（每周电视短片数量上限）

X2 ≤5（每周报纸广告数量上限）

X3 ≤25（每周30秒电台广告数量上限）

X4 ≤20（每周1分钟电台广告数量上限）

X3+X4 ≥5（合同规定最低电台广告数量）

290X3+380X4 ≤1800（电台广告预算上限）

X1 ， X2 ，X3， X4 ≥0

案例2：人力资源分配

百佳华商场对售货员的需求经过统计分析如下表。为了保证售货员充分休息，售货员每周工作 5天，休息两天，并要求休息的两天是连续的。问应该如何安排售货员的工作时间，既满足工作需要，又使人力资本最节约？

时间	所需售货员人数
星期日	28
星期一	15
星期二	24
星期三	25
星期四	19
星期五	31
星期六	28

决策变量：设 x_i (i = 1~7)表示星期一至日开始休息的人数

目标函数：Minimize $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$

约束条件：

$$
\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 28 \\
& x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 15 \\
& x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 24 \\
& x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_1 \geq 25 \\
& x_5 + x_6 + x_7 + x_1 + x_2 \geq 19 \\
& x_6 + x_7 + x_1 + x_2 + x_3 \geq 31 \\
& x_7 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 28
\end{aligned}
$$

$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7$ 为非负整数

模型设计

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	目标函数：										
2		Min x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6 + x7									
3	约束条件：										
4	s. t.	x1 + x2 + x3 + x4 + x5 ≥ 28									
5		x2 + x3 + x4 + x5 + x6 ≥ 15									
6		x3 + x4 + x5 + x6 + x7 ≥ 24									
7		x4 + x5 + x6 + x7 + x1 ≥ 25									
8		x5 + x6 + x7 + x1 + x2 ≥ 19									
9		x6 + x7 + x1 + x2 + x3 ≥ 31									
10		x7 + x1 + x2 + x3 + x4 ≥ 28									
11		x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7 ≥ 0									
12											
13	决策变量	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**	**x7**			
14		1	1	1	1	1	1	1			
15											
16	目标函数：	7			**输入什么公式？**						
17											
18	约束条件：								实际		约束
19	星期日	1	1	1	1	1	0	0	5	>=	28
20	星期一	0	1	1	1	1	1	0	5	>=	15
21	星期二	0	0	1	1	1	1	1	5	>=	24
22	星期三	1	0	0	1	1	1	1	5	>=	25
23	星期四	1	1	0	0	1	1	1	5	>=	19
24	星期五	1	1	1	0	0	1	1	5	>=	31
25	星期六	1	1	1	1	0	0	1	5	>=	28

模型结果

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	目标函数：										
2		Min	x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6 + x7								
3	约束条件：										
4	s. t.	x1 + x2 + x3 + x4 + x5 ≥ 28									
5		x2 + x3 + x4 + x5 + x6 ≥ 15									
6		x3 + x4 + x5 + x6 + x7 ≥ 24									
7		x4 + x5 + x6 + x7 + x1 ≥ 25									
8		x5 + x6 + x7 + x1 + x2 ≥ 19									
9		x6 + x7 + x1 + x2 + x3 ≥ 31									
10		x7 + x1 + x2 + x3 + x4 ≥ 28									
11		x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7 ≥ 0									
12											
13	决策变量	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**	**x7**			
14		12	0	11	5	0	8	0			
15											
16	目标函数：	36									
17											
18	约束条件：								实际		约束
19	星期日	1	1	1	1	1	0	0	28	>=	28
20	星期一	0	1	1	1	1	1	0	24	>=	15
21	星期二	0	0	1	1	1	1	1	24	>=	24
22	星期三	1	0	0	1	1	1	1	25	>=	25
23	星期四	1	1	0	0	1	1	1	20	>=	19
24	星期五	1	1	1	0	0	1	1	31	>=	31
25	星期六	1	1	1	1	0	0	1	28	>=	28

模型结果

应该安排休息人数：

星期一：12人

星期三：11人

星期四：5人

星期六：8人

该商场总共最少需要聘用36名售货员。

Recap

1. 问题与模型
2. 模型求解
3. 敏感性分析
4. 案例

课堂讨论

1. 怎样建立线性规划模型？
2. 影子价格和对偶价格的含义，如何计算？
3. 对线性规划模型进行敏感性分析，可从哪些方面着手？

实践问题：桌子椅子生产问题

一家具厂只生产桌子和椅子。已知生产一张桌子需要消耗4公斤木料，2小时的机器时间和1小时的油漆抛光时间；而生产一张椅子则需要消耗1公斤木料，1小时的机器时间和1小时的油漆抛光时间。

该家具厂每周最多只能提供90公斤木料，50小时的机器时间和40小时的抛光时间。已知市场上每售出一张桌子有40元的利润，售出一张椅子有30元的利润。

回答如下问题：

（1）写出线性规划模型；

（2）求出模型的最优解；

（3）进行敏感性分析。