商务决策：模型与应用
Business Decision modelling

第三章 线性规划模型

王树佳 | 深圳大学经济学院
sjwang123@163.com

张五常：根据我40年的经济学研究经验，

“

经济学中有两个基本原理，对这两个原理的掌握和理解程度能反映一个经济学者的水平。其一，约束条件下的极大化；其二，在一般情况下需求曲线斜率为负。

”

张五常
著名经济学家
香港大学经济金融学院院长

本章目的

商务决策经常遇到资源配置问题，这些问题往往需要考虑各种类型的约束：资金、人力资源、法律和行为限制等。

本章主要目的**是解决在约束条件下如何取得最优配置问题**。

1. 如何建立线性规划模型?
2. 如何求解线性规划模型?
3. 如何进行敏感性分析?

Excel技能:
运用规划求解(Solver)功能

第三章 线性规划模型
Linear Programming

第三章 线性规划模型
Linear Programming

第一节 线性规划模型的建立

第二节 两个决策变量的图解法

第三节 敏感性分析

第四节 Excel的规划求解

第五节 多决策变量的规划模型

例2-1（生产计划问题）

某企业生产两种产品：A型和B型工艺品，使用机器和劳动力加工生产，机器使用时间和劳动力的工作时间有限制。问题：如何科学安排A型和B型工艺品的产量，使得该企业的利润最大。该企业的资源约束、单位消耗状况和单位销售利润如下表：

生产一个单位的产品	A型工艺品（件）	B型工艺品（件）	资源约束
机器加工时间	3（小时）	2（小时）	90（小时）
劳动时间	1（小时）	2（小时）	50（小时）
产品需要限量	/	20	
销售利润	8（元/件）	7（元/件）	

线性规划模型的三个组成部分

1. 决策变量：x_1=A型数量；x_2=B型数量
2. 目标函数：利润最大，**Max** $z = 8x_1+7x_2$
3. 约束条件:

$$3x_1 + 2x_2 \le 90$$ (机器加工时间有限制)

$$x_1 + 2x_2 \le 50$$ （劳动时间限制）

$$x_2 \le 20$$ (产品需要限量)

$x_1 \ge 0$； $x_2 \ge 0$ (非负条件)

生产一个单位的产品	A型工艺品（件）	B型工艺品（件）	资源约束
机器加工时间	3（小时）	2（小时）	90（小时）
劳动时间	1（小时）	2（小时）	50（小时）
产品需要限量	/	20	
销售利润	8（元/件）	7（元/件）	

线性规划问题的标准形式

决策变量：$x_1, x_2, \cdots, x_n$

目标函数：$\min c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

约束条件：

$$
s.t.\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0
\end{cases}
$$

本节小结

建立线性规划模型的关键问题

1. 你的目标是什么？最小化还是最大化？(目标函数)
2. 影响目标的变量是什么？(决策变量)
3. 决策变量受到哪些约束？(资源约束还是条件需求？直接还是间接约束？)

第三章 线性规划模型
Linear Programming

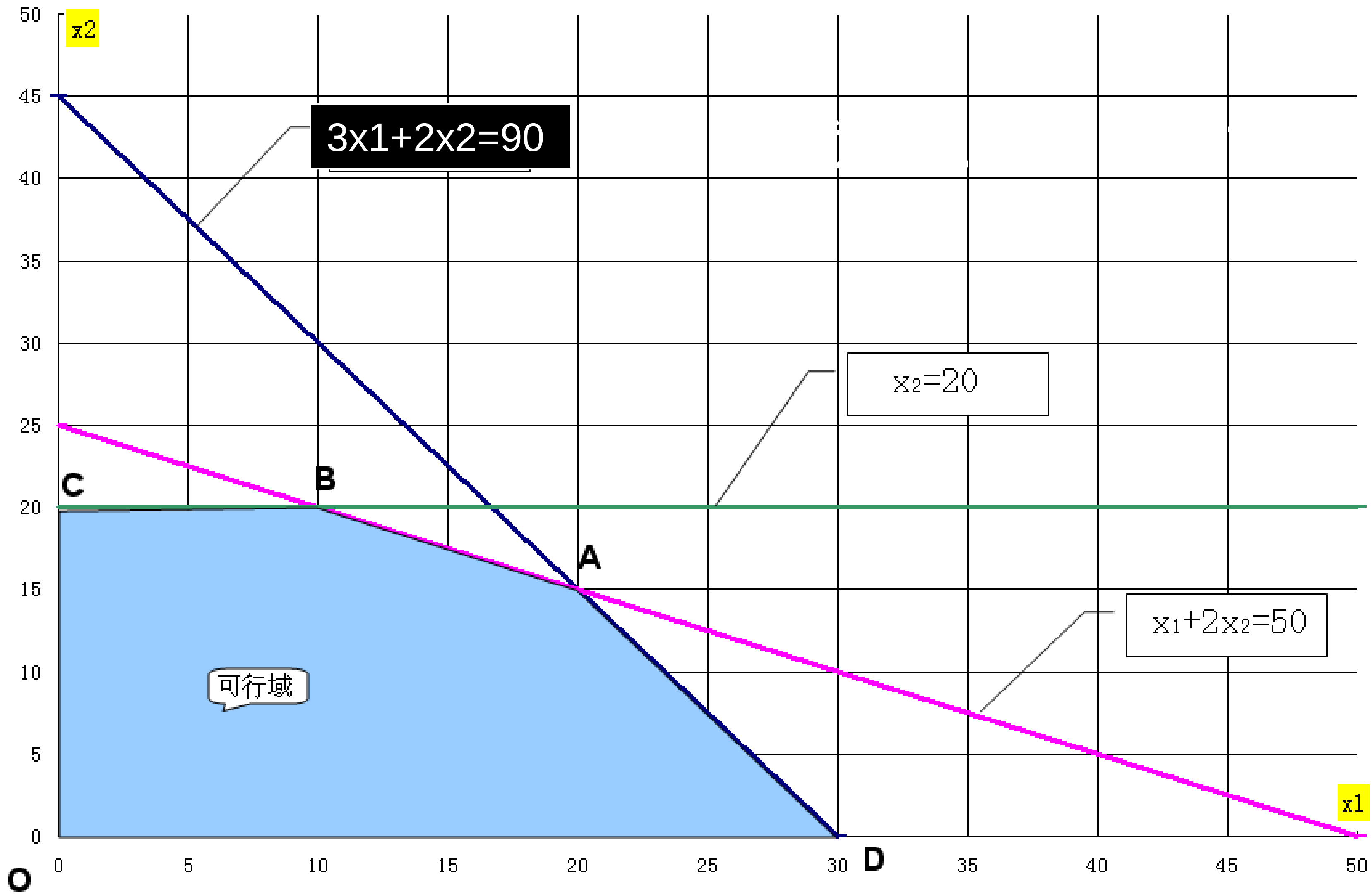
第二节　线性规划的图解法

【例1-1】：

1. 决策变量：x1＝A型数量；x2＝B型数量
2. 目标函数：利润最大，Max z＝8x1＋7x2
3. 约束条件:

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 &\le 90 \quad \text{(机器加工时间有限制)}\\
x_1 + 2x_2 &\le 50 \quad \text{（劳动时间限制）}\\
x_2 &\le 20 \quad \text{(产品需要限量)}\\
x_1 \ge 0;\quad x_2 &\ge 0 \quad \text{(非负条件)}
\end{aligned}
$$

第二节 线性规划的图解法



第二节 线性规划的图解法

最优解: 通常在可行域顶点处取得。

最优整数解: 不一定是顶点坐标的近似值，它应是目标函数所对应的直线平移进入可行域最先或最后经过的那一整点的坐标。

　　如果线性目标函数的斜率与某可行域边界直线斜率相同，则最优解则包括可行域上的一条边。

图解法求最优解:

　　法1：计算各个顶角处的目标函数值

　　法2：画出目标函数的等值线，考察等值线与可行域的交点

第二节 线性规划的图解法

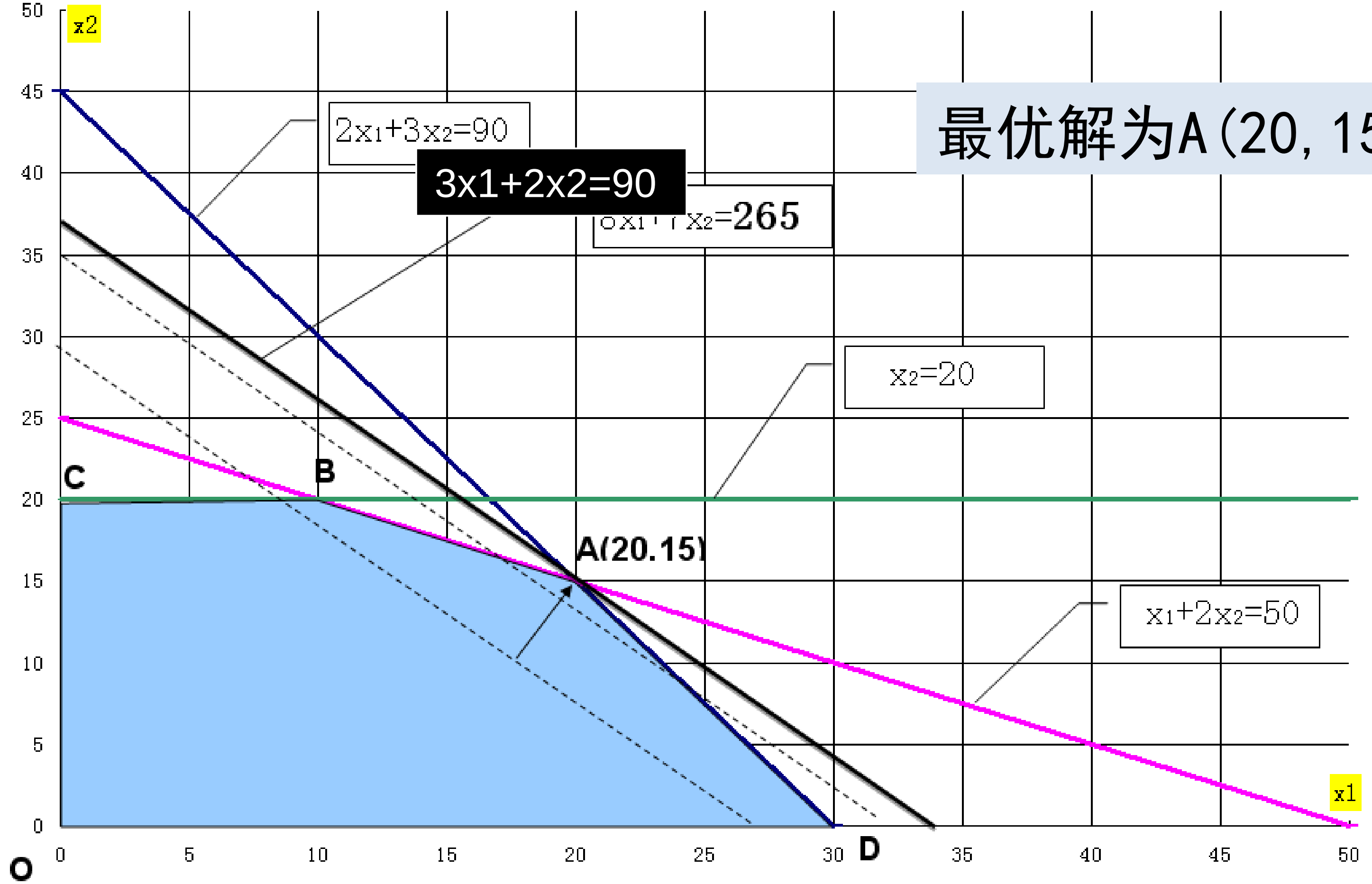
顶点	x1	x2	利润
A	20	15	265
B	10	20	220
C	0	20	140
D	30	0	240
0	0	0	0

顶角中，A点(20,15)的利润最大，为265元。所以该线性规划问题的最优解为x1=20,x2=15。

即企业应安排生产A型产品20个，B型产品15个，可以达到最大利润265元。

第二节 线性规划的图解法

画出目标函数的等值线，并确定该等值线值增加的平移方向，平移此目标函数的等值线。



第三章 线性规划模型
Linear Programming

第一节 线性规划模型的建立

第二节 两个决策变量的图解法

第三节 敏感性分析

第四节 Excel的规划求解

第五节 多决策变量的规划模型

第三节 敏感性分析
Sensitivity Analysis

一、什么是敏感性分析

二、若干概念：紧约束、松弛量、剩余量、影子价格和对偶价格

三、资源约束的变化范围

四、目标函数系数的变化范围

什么是敏感性分析

在【例1-1】中，机器加工时间和劳动时间的约束条件为90和50小时，当A、B两类工艺品的产量分别为20件、15件时，企业利润达到最大值265元。

现在，如果以下条件改变了，会有什么改变呢?

•**生产资源改变**：

如果资源约束的条件发生改变，比如机器加工的时间约束由原来的90小时增加到95小时（通过购买或租赁机器设备获得），这时:

-企业的最优生产组合和最大利润是否会发生改变?

-购买额外的5个小时的机器加工时间需要一定的费用，这是否值得?

什么是敏感性分析

•**市场条件改变**：

如果产品市场受供求的影响，导致单位产品的利润发生了变化，原先A型工艺品的单位利润从8元增加或降低1元，这样对生产资源的运用是否要改变呢？各类产品的数量应该如何调整才能使利润达到最大呢？

•**生产效率或生产过程改变**：

如果产品在使用劳动时间方面提高了效率，如B型工艺品从1小时/件减少到0.5小时/件，同样问各类产品的生产数量应该如何安排才能使利润达到最大呢？

$$\text{Max}\ \boxed{8}X1 + \boxed{7}X2$$

市场条件变化：目标函数系数

s.t.

$$
\begin{aligned}
\boxed{3}X1 + \boxed{2}X2 &<= \boxed{90} \\
X1 + 2X2 &<= 50 \\
X2 &<= 20 \\
X\ ,\ Y &>=0
\end{aligned}
$$

生产资源改变：约束不等式右边常数

生产效率或生产过程改变：约束不等式左边系数

最优解(X1,X2)=(20,15)，即当A、B两类工艺品的产量分别为20件、15件时，企业利润达到最大值265元

什么是敏感性分析

所谓**敏感性分析**(Sensitivity Analysis)，就是研究当模型（系统）的某些条件发生变化时，模型（系统）相应会发生何种变化。

1.对资源约束条件变化的敏感性分析

在目标函数系数保持不变的前提下，各个资源条件约束值可以在什么范围变动，使得影子价格不变?

2.对目标函数系数的敏感性分析

在各资源约束条件不变的前提下，各个目标函数系数可以在什么范围变动，可以使得最优解不变?

第三节 敏感性分析
Sensitivity Analysis

一、什么是敏感性分析

二、若干概念：紧约束、松弛量、剩余量、影子价格和对偶价格

三、资源约束的变化范围

四、目标函数系数的变化范围

问题回顾

X1＝A型数量；X2＝B型数量

Max Z=8X1＋7X2

$$3x_1 + 2x_2 \le 90 \quad \text{(机器加工时间有限制)}$$

$$x_1 + 2x_2 \le 50 \quad \text{（劳动时间限制）}$$

$$x_2 \le 20 \quad \text{(产品需要限量)}$$

$$x_1 \ge 0;\quad x_2 \ge 0 \quad \text{(非负条件)}$$

最优解(X1,X2)=(20,15)，即当A、B两类工艺品的产量分别为20件、15件时，企业利润达到最大值265元

紧约束: Binding Constraint

劳动时间：

资源约束为50小时，实际消耗为

$$1 \times 20+2 \times 15 = 50\text{（小时）}$$

劳动时间的全部资源完全利用，增加或减少劳动时间，都将引起最优生产计划和最大利润的改变。

一般来说，对于一个约束条件，若增加（或减少）1个单位的资源，将会导致目标值增加(或降低)，该约束的资源限制在最大化目标下达到了边界值，称该约束为**紧约束**(Binding)。

紧约束: Binding Constraint

机器加工时间：

资源约束为90小时，实际消耗为

$$3 \times 20 + 2 \times 15 = 90\text{（小时）}$$

机器加工时间全部用完，说明也是紧约束。

松弛量(Slack)和剩余量(Surplus)

产品限量约束：

资源约束为20个，实际生产15个。

约束条件没有达到，尚有5个产品指标未被使用。此时如果增加1个产品的限额，对最优生产组合没有任何影响，最优解没有变化，相应地不改变最大销售利润。这样的约束叫非紧约束(Nonbinding)

对于一个约束条件，若增加（或减少）1个单位的资源，对生产组合和最优解没有任何影响，则称该约束有松弛。本例中，产品限量约束有5个单位的**松弛量**(Slack)，即 SLACK=5。

松弛量(Slack)和剩余量(Surplus)

如果有另一总产量约束条件：
$x1 + x2 \geqslant 32$（两产品组合的最低产出约束）。

最优解(20, 15)使总产量达35单位，在该约束边界值32的范围内，比最低产出要求多出3个单位。
称该约束条件有3个单位的**剩余量**（Surplus）。

对于"≤"资源约束条件，约束值与实际资源消耗量的差，称为**松弛量**；
对于"≥"资源约束条件，实际资源消耗量与约束值的差，称为**剩余量**。

影子价格与对偶价格

影子价格(Shadow Price):

资源约束（约束右边数值）增加1个单位所引起的**目标函数值**的**改变量**。

对偶价格(Dual Price):

资源约束（约束右边数值）增加1个单位所引起的**目标函数值**的**改进量**。

对最大化问题：两者相同

对最小化问题：影子价格等于对偶价格的负数。

影子价格

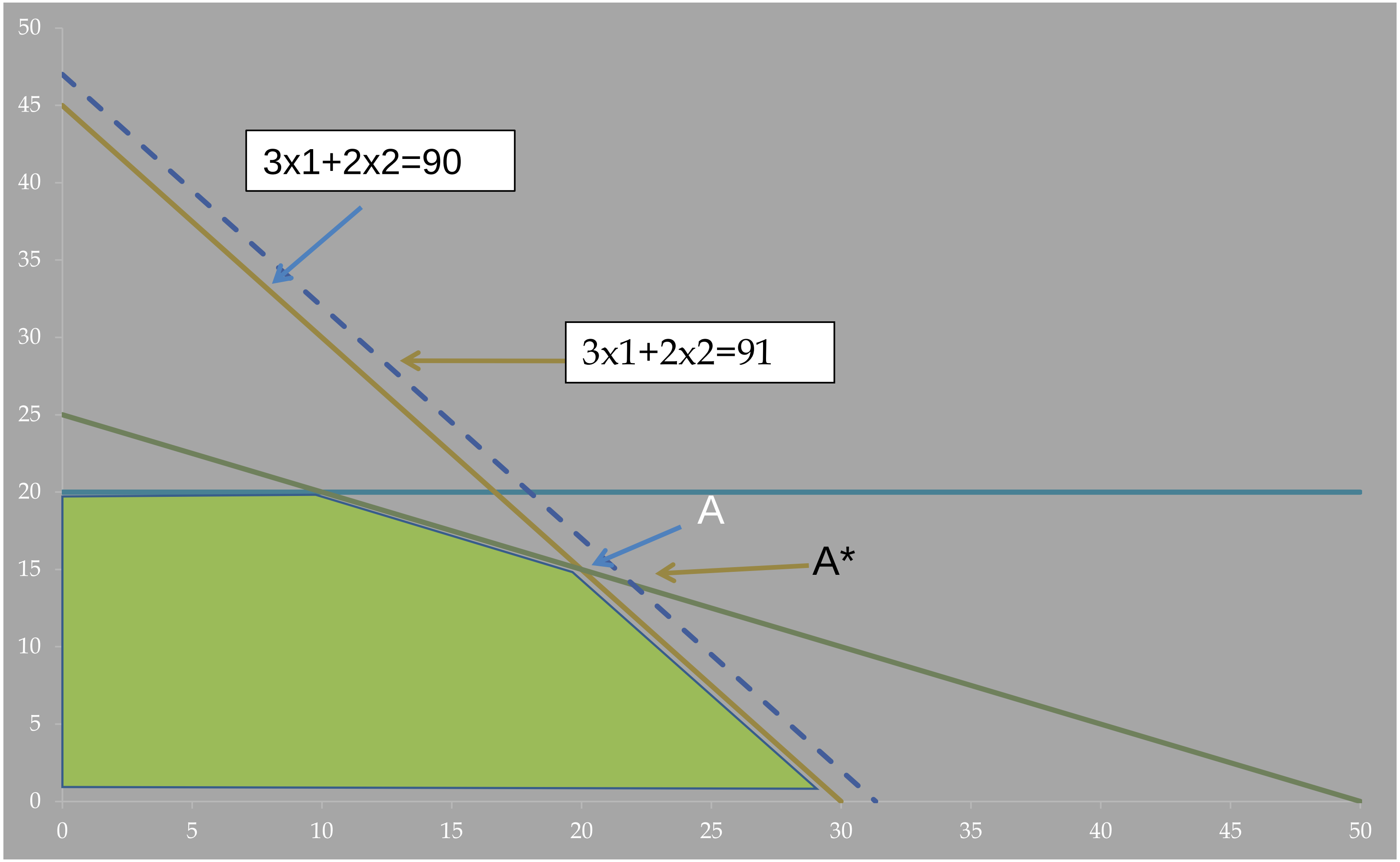
机器加工时间的影子价格：

假如机器加工时间增加1个小时，即由原来的90小时增加到91小时。

原约束：$3x_1 + 2x_2 \leq 90$

新约束：$3x_1 + 2x_2 \leq 91$

影子价格



影子价格

原最优解：A(20,15)

新最优解A*：(20.5, 14.75)

直线$3x_1 + 2x_2 = 91$与$x_1 + 2x_2 = 50$ 交点

原最大利润：Z=265

现最大利润：

Z1=8×20.5 +7×14.75 = 267.25

Shadow Price =目标函数改变量

=267.25-265 = 2.25

i.e. 如果机器时间增加1小时，最大利润可以增加2.25元。

影子价格

劳动时间的影子价格：1.25 （练习）

产量限制约束的影子价格：0（Why?）

第三节 敏感性分析
Sensitivity Analysis

一、什么是敏感性分析

二、若干概念：紧约束、松弛量、剩余量、影子价格

三、资源约束的变化范围

四、目标函数系数的变化范围

为什么要研究资源约束的变化范围?

作为经理，你知道机器加工时间的影子价格为2.25元，如果购买机器时间的成本是每小时1.25元，意味着每购买1小时机器加工时间，你可以净赚1元。那么你会尽可能购买更多的机器时间(称为放松约束，Relaxing a constraint)。

- 多购买1小时，利润增加2.25元;
- 多购买2小时，利润增加2×2.25元
- 多购买10小时?

资源约束的变化范围

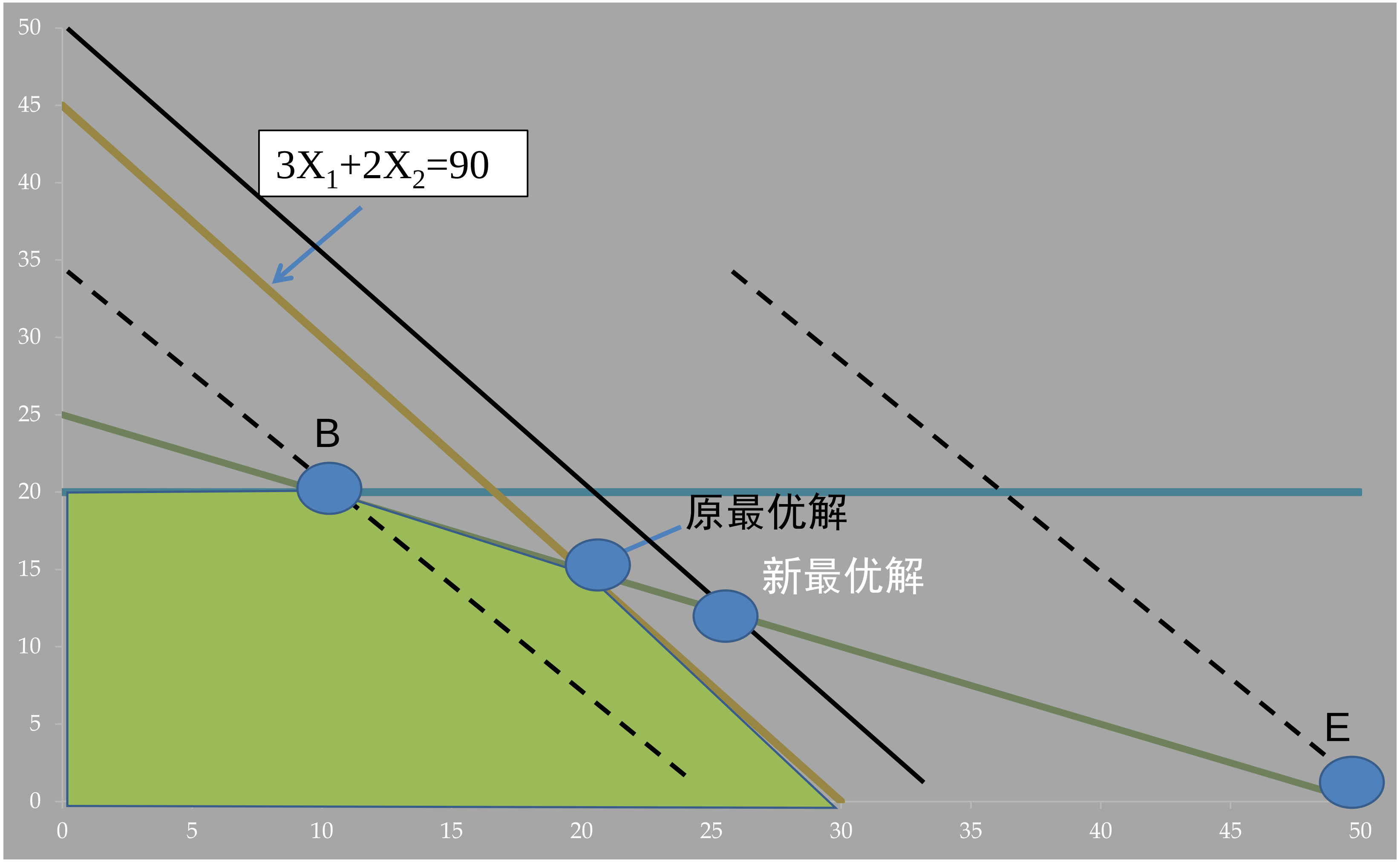
资源约束的变化范围是指：在什么范围内，影子价格保持不变?

（影子价格保持不变意味着什么？意味着在该范围内，只要购买额外资源的成本低于影子价格，企业都是有利可图的）。

什么情况下影子价格不变?

最优解所在顶角不变

机器加工时间的变化范围



机器加工时间的变化范围

最小：交于B(10,20)点

$3X1+2X2=3*10+2*20=70$

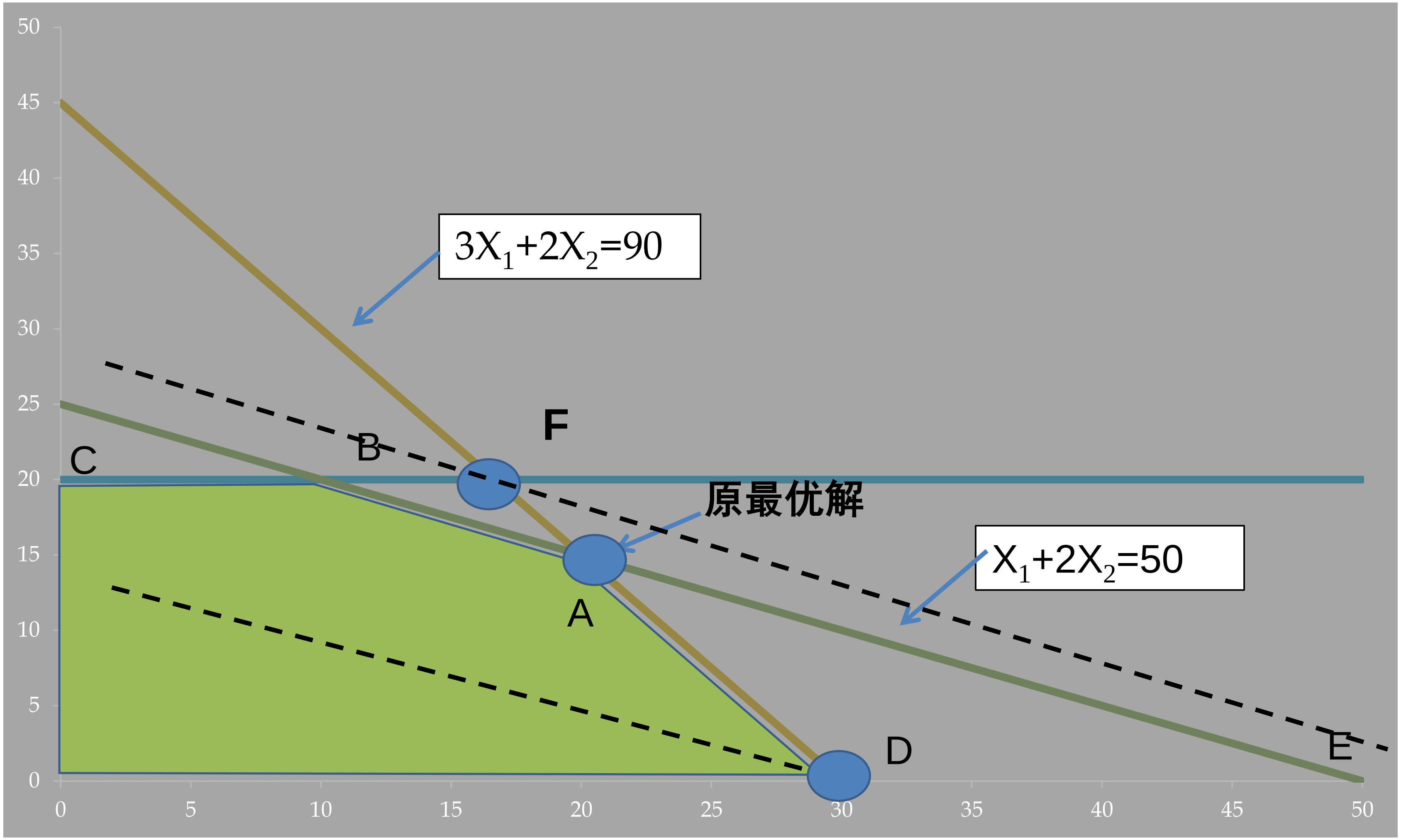
最大：交于E(50,0)点

$3X1+2X2=3*50+2*0=150$

机器加工时间允许的变化范围：

原约束值	下限	上限
90	70	150

劳动时间的变化范围



50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
0 5 10 15 20 25 30 35 40 45 50
$3X_1+2X_2=90$
$X_1+2X_2=50$
F
B
C
原最优解
A
D
E

劳动时间的变化范围

最小：交于D(30,0)点

X1+2X2=30+2*0=30

最大：交于F(50/3, 20)点

X1+2X2=50/3+2*20 =56.67

劳动时间允许的变化范围：

原约束值	下限	上限
50	30	56.67

产量约束的变化范围

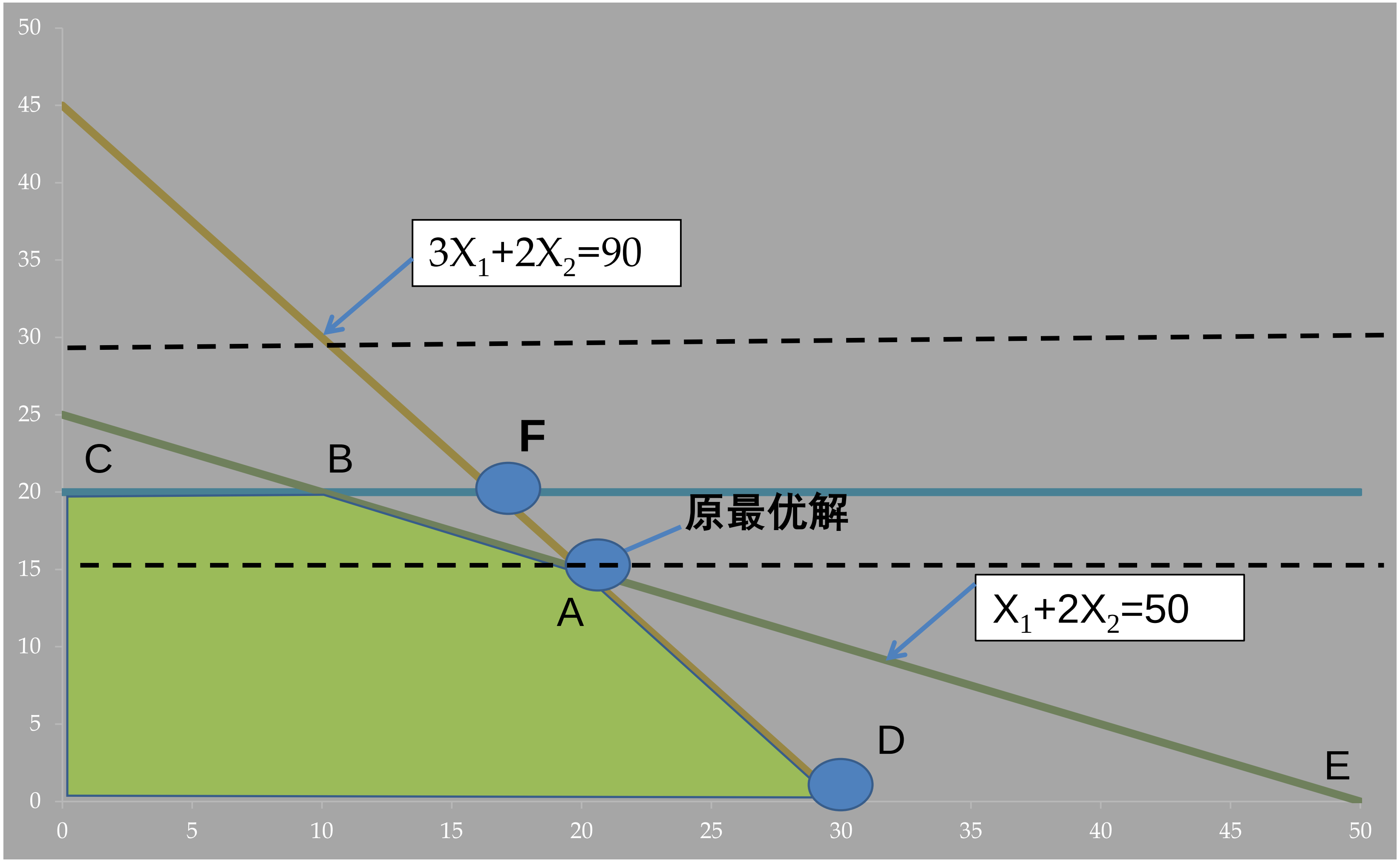
最小：交于？点

最大：交于？点

产量约束允许的变化范围：

原约束值	下限	上限
20	15	$+\infty$

产量约束的变化范围



50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
3X1+2X2=90
F
C
B
原最优解
A
X1+2X2=50
D
E

资源约束的变化范围：小结

1.允许的变化范围：在区间内影子价格不变
2.最优解可能会变化
3.最优目标函数值可能会变化

约束	约束方程	实际值	影子价格	约束限制值	允许的上限	允许的下限
机器时间	3x1+2x2=90	90	2.25	90	150	70
劳动时间	x1+2x2=50	50	1.25	50	56.67	30
产量限制	x2=20	15	0	20	无穷大	15

第三节 敏感性分析
Sensitivity Analysis

一、什么是敏感性分析

二、若干概念：紧约束、松弛量、剩余量、
影子价格

三、资源约束的变化范围

四、目标函数系数的变化范围

为什么要研究目标函数系数的变化范围?

你知道，卖出每个A型产品利润8元，B型每个7元。最佳生产计划是每天生产A型产品为20件，B型产品15件时，此时企业利润达到最大值265元。

假如市场环境改变了，A型产品热销，价格上涨了1元，预计很快可以再涨5元。 作为企业老板，你的生产计划是否需要调整?

为什么要研究目标函数系数的变化范围?

换个角度问：

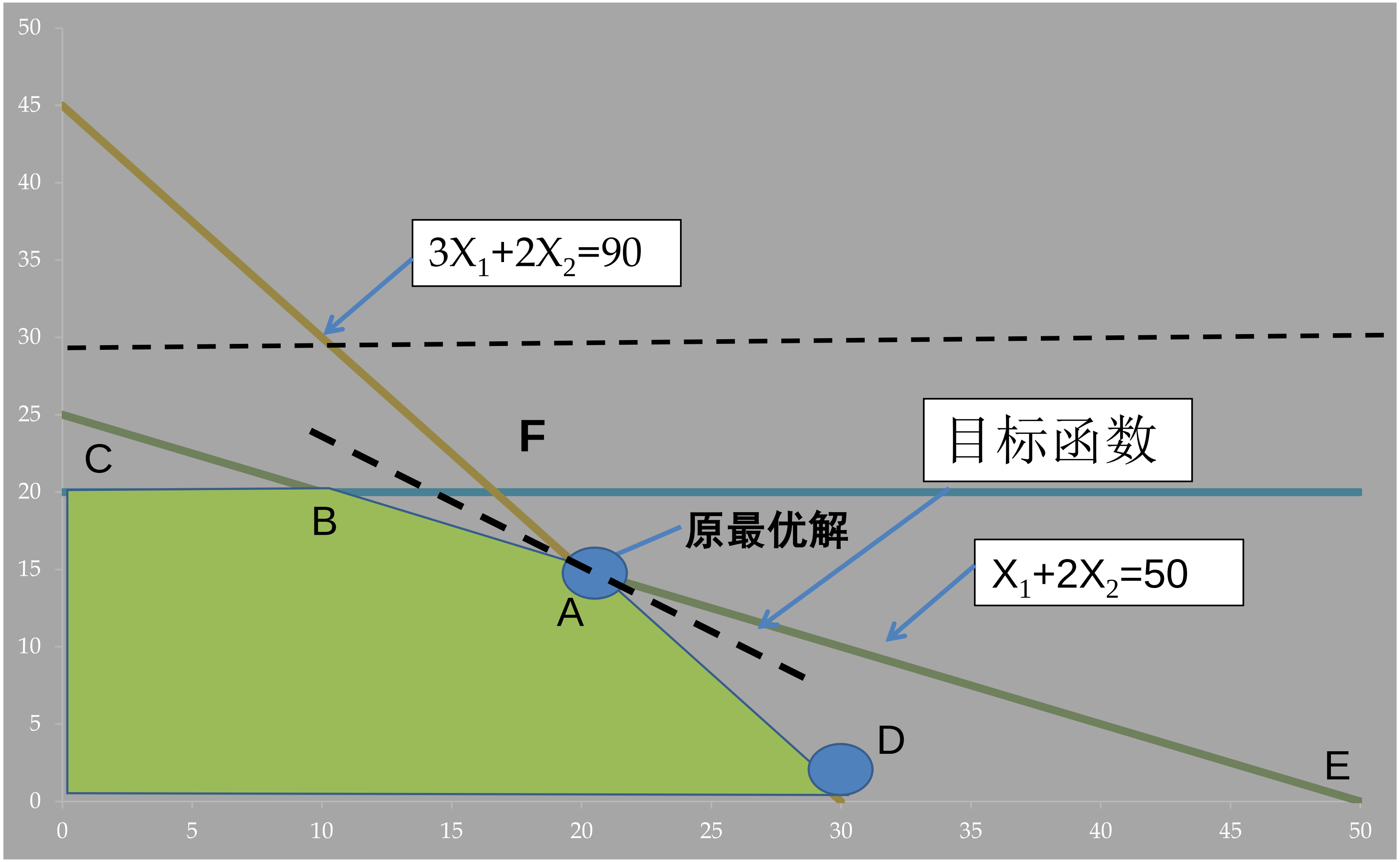
A型产品的价格在什么范围内变化，你的生产计划不需要调整？

（超出这个范围才需要调整）

目标函数系数的允许变化范围是指：

目标函数 Z = 8X1+7X2的系数在什么范围内变化时，线性规划的**最优解**保持不变？

目标函数系数的变化范围



目标函数系数a的变化范围

假设目标函数为： $Z = aX_1 + 7X_2$

系数a的变化范围?

要使最优解保持不变，目标函数的斜率必须在直线$3X_1+2X_2=90$ **与** $X_1+2X_2=50$ **之间**。

目标函数系数a的变化范围

目标函数：**$Z = aX_1 + 7X_2$ 斜率:$k= -a/7$**

直线$3X_1+2X_2=90$：$k1= -1.5$

直线$X_1+2X_2=50$： $k2= -0.5$

必须： **$-1.5 \le -a/7 \le -0.5$**

即： $3.5 \le a \le 10.5$

目标函数系数a的变化范围：

原值	下限	上限
8	3.5	10.5

什么意义？

目标函数系数b的变化范围

目标函数：$Z = 8X_1 + bX_2$ 斜率:$k= -8/b$

必须： **$-1.5 \le -8/b \le -0.5$**

即： **$5.33 \le b \le 16$**

目标函数系数**b**的变化范围：

原值	下限	上限
7	5.33	16

百分之百法则：目标函数系数

若多个目标函数系数同时变化：

计算每一个系数的变化量占单独考虑时允许变动量（增加和减少的）的百分比，然后相加。

若所得之和不超过100%，则最优解不变；否则，不能确定。

前提：其它条件假设不变

百分之百法则：约束资源

若多个约束右边数值同时变化：

计算每一个常数值的变化量占单独考虑时允许变动量（增加和减少的）的百分比，然后相加。

如果所得之和不超过100%，则约束资源的影子价格不变；否则，不能确定。

前提：其它条件假设不变

百分之百法则注意事项

1.若约束常数值与目标函数系数同时变化，则不能应用百分之百法则

2.百分之百法则是判断最优解或影子价格是否变化的充分条件，不是必要条件。

即：不超过100%，最优解或影子价格不变；超过100%，不能确定。

3.当允许增加（减少）量为无穷大时，允许增加（减少）百分比为0.

例：目标函数系数

目标函数：Z = 8X1 + 7X2

目标函数系数的变化范围：

系数	原值	允许增量	允许减量
a	8	2.5	4.5
b	7	9	1.67

如果a减少2，b增加3，最优解是否改变？

答：$2/4.5 + 3/9 = 0.78 < 100\%$

不变

本节小结

一、什么是敏感性分析

二、若干概念：紧约束、松弛量、剩余量、影子价格和对偶价格

三、资源约束的变化范围

四、目标函数系数的变化范围

思考：生产效率或生产过程改变，约束不等式左边系数？

第三章 线性规划模型
Linear Programming

第一节 线性规划模型的建立

第二节 两个决策变量的图解法

第三节 敏感性分析

第四节 Excel的规划求解

第五节 多决策变量的规划模型

线性规划的Excel求解

- 模型输入：电子表格
- 模型求解：
  ✌“规划求解”(Solver)，指定决策变量，目标函数和约束
- 结果输出：

运算结果报告；敏感性报告；极限值报告

规划求解功能的安装

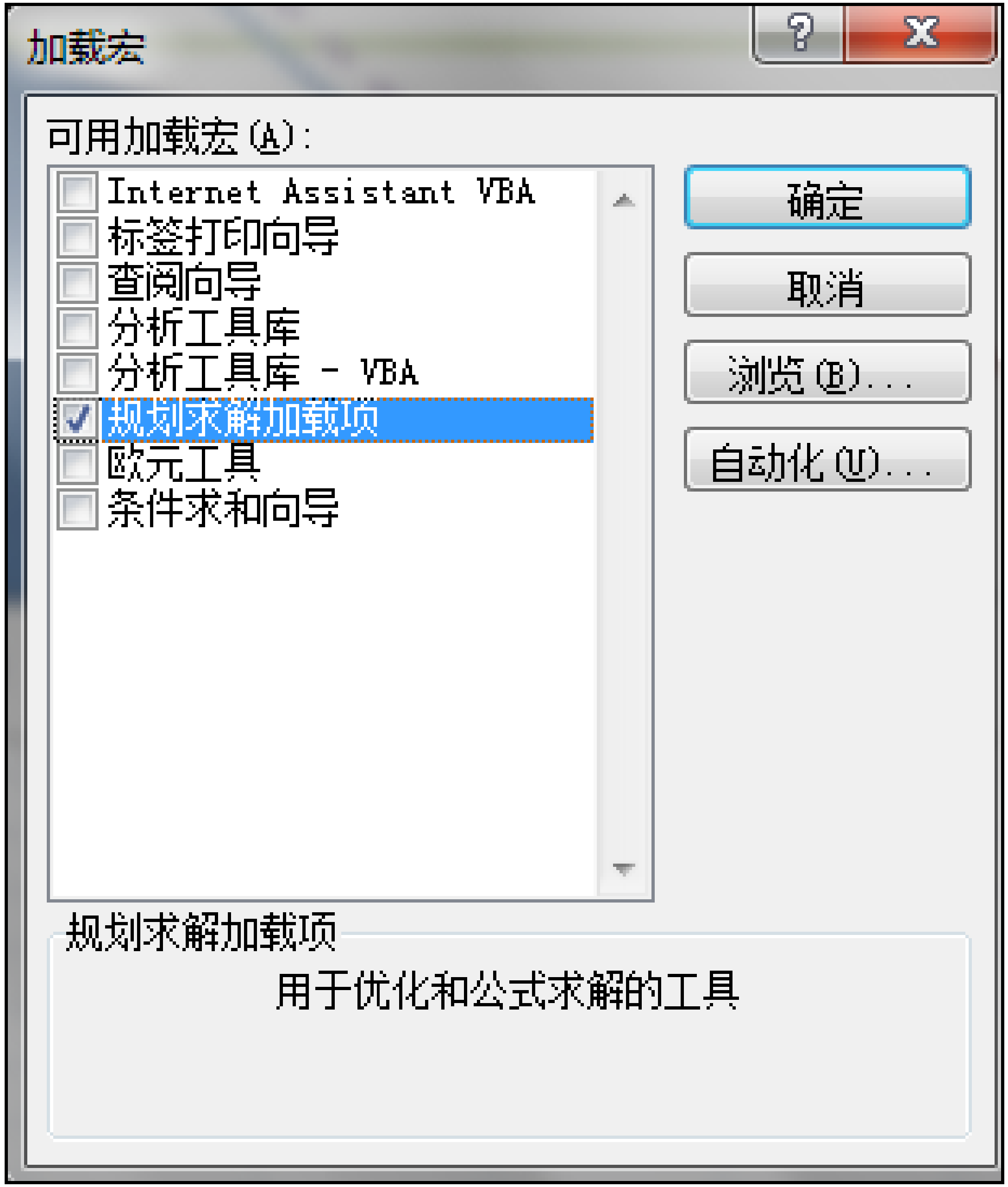
在EXCEL中“规划求解”(英文版：Solver)不是默认安装的。

加载办法：

Office2003：工具=>加载宏=>规划求解(打钩)

Office2007以上：

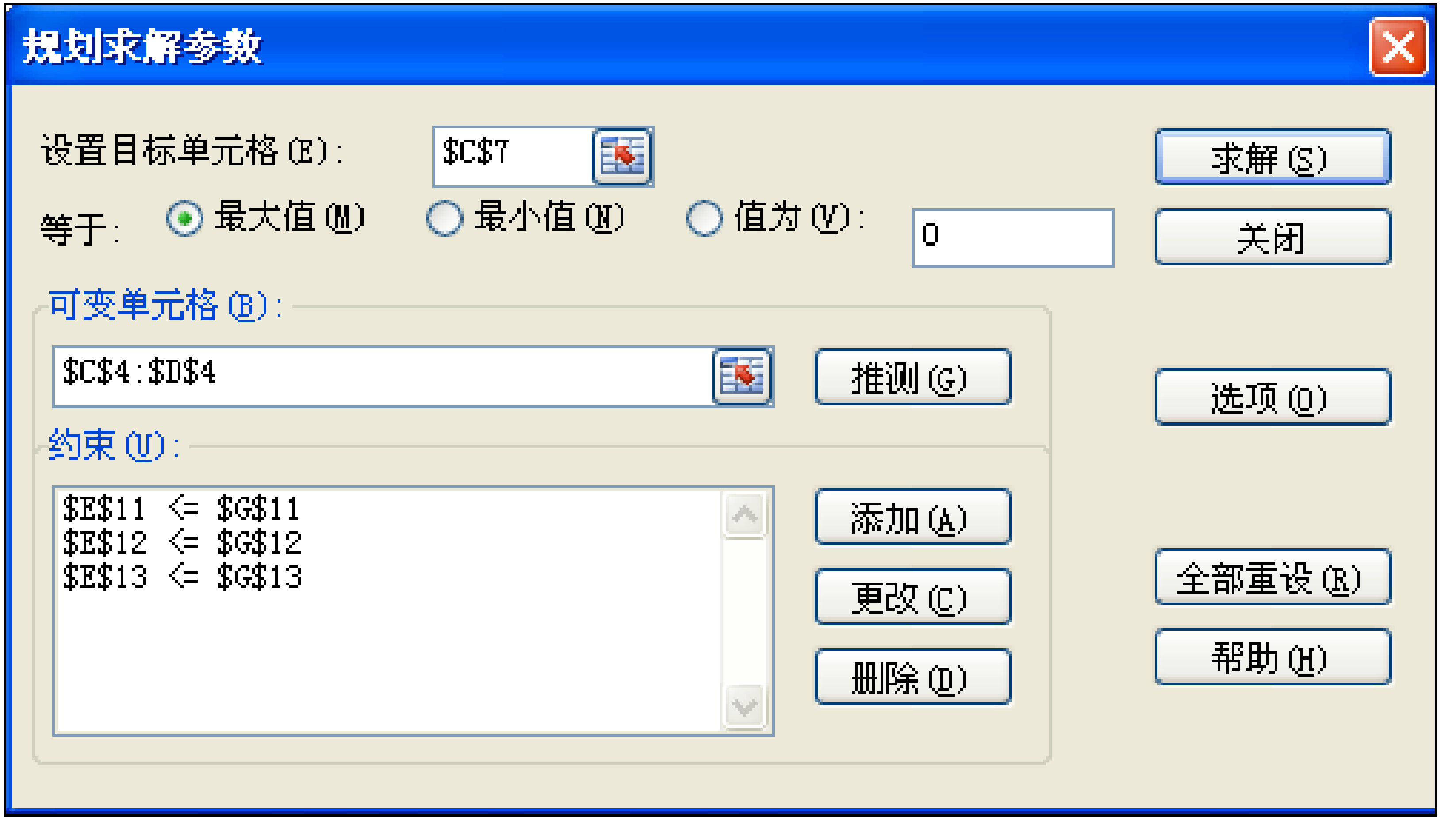
左上角Office图标=>右下角Excel选项=>加载项=>规划求解加载项=>左下角“转到”=>规划求解(打钩)


加载宏
可用加载宏(A):
Internet Assistant VBA
标签打印向导
查阅向导
分析工具库
分析工具库 - VBA
规划求解加载项
欧元工具
条件求和向导
确定
取消
浏览(B)...
自动化(U)...
规划求解加载项
用于优化和公式求解的工具

第一步：规划模型的设计

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	决策变量						
3		产品型号	A型	B型			
4		生产数量	0	0			
5							
6		利润/产品	8	7			
7	目标函数	Z =	=C6*C4+D6*D4				
8							
9	约束						
10					实际使用		资源限制
11		机器时间	3	2	=C11*$C$4+D11*$D$4	<=	90
12		劳动时间	1	2	=C12*$C$4+D12*$D$4	<=	50
13		产量限制	0	1	=C13*$C$4+D13*$D$4	<=	20

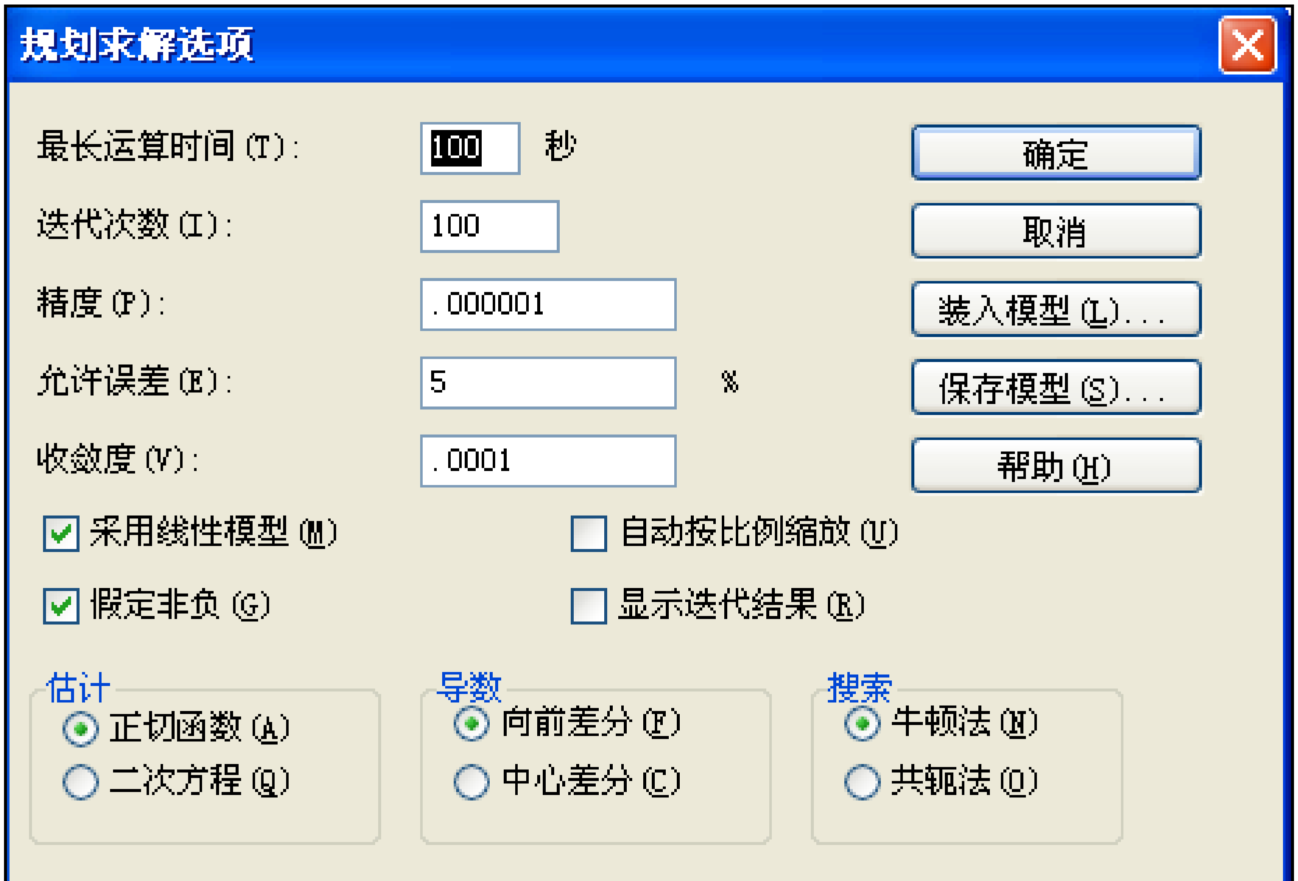
第二步：规划模型的求解



规划求解参数
设置目标单元格 (E):
$C$7
求解 (S)
等于:
最大值 (M)
最小值 (N)
值为 (V):
0
关闭
可变单元格 (B):
$C$4:$D$4
推测 (G)
选项 (O)
约束 (U):
$E$11 <= $G$11
$E$12 <= $G$12
$E$13 <= $G$13
添加 (A)
更改 (C)
删除 (D)
全部重设 (R)
帮助 (H)

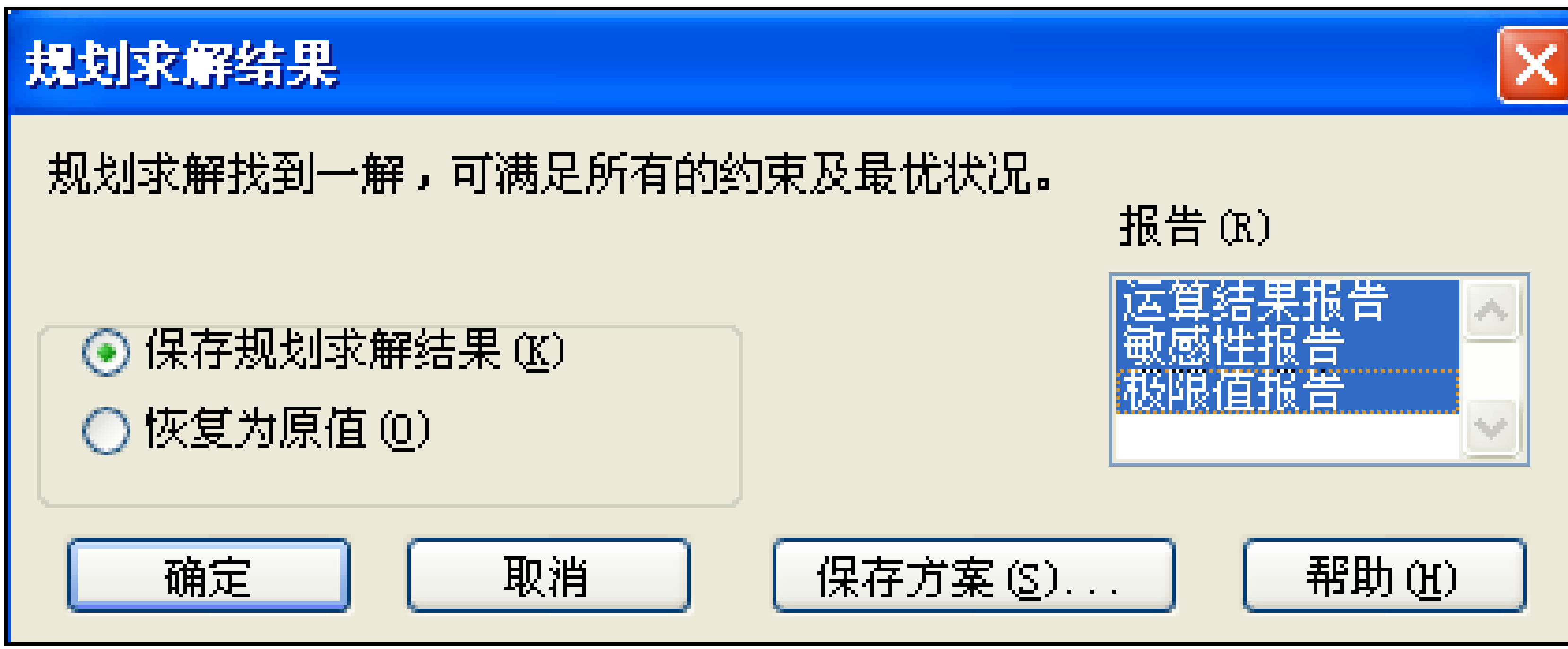
第二步：规划模型的求解

点击“选项”，如下：



第二步：规划模型的求解

点击“求解”：如果想输出敏感性分析等结果，需在“报告”项选择。



第三步：规划模型的求解结果

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2	决策变量						
3		产品型号	A型	B型			
4		生产数量	20	15			
5							
6		利润/产品	8	7			
7	目标函数	Z =	265				
8							
9	约束						
10					实际使用		资源限制
11		机器时间	3	2	90	<=	90
12		劳动时间	1	2	50	<=	50
13		产量限制	0	1	15	<=	20

运算结果报告

目标单元格（最大值）

单元格	名字	初值	终值
$C$7	Z = A型	265	265

可变单元格

单元格	名字	初值	终值
$C$4	生产数量 A型	20	20
$D$4	生产数量 B型	15	15

约束

单元格	名字	单元格值	公式	状态	型数值
$E$11	机器时间 实际使用	90	$E$11<=$G$11	到达限制值	0
$E$12	劳动时间 实际使用	50	$E$12<=$G$12	到达限制值	0
$E$13	产量限制 实际使用	15	$E$13<=$G$13	未到限制值	5

敏感性报告

可变单元格

单元格	名字	终值	递减成本	目标式系数	允许的增量	允许的减量
$C$4	生产数量 A型	20	0	8	2.5	4.5
$D$4	生产数量 B型	15	0	7	9	1.666666667

约束

单元格	名字	终值	阴影价格	约束限制值	允许的增量	允许的减量
$E$11	机器时间 实际使用	90	2	90	60	20
$E$12	劳动时间 实际使用	50	1	50	6.666666667	20
$E$13	产量限制 实际使用	15	0	20	1E+30	5

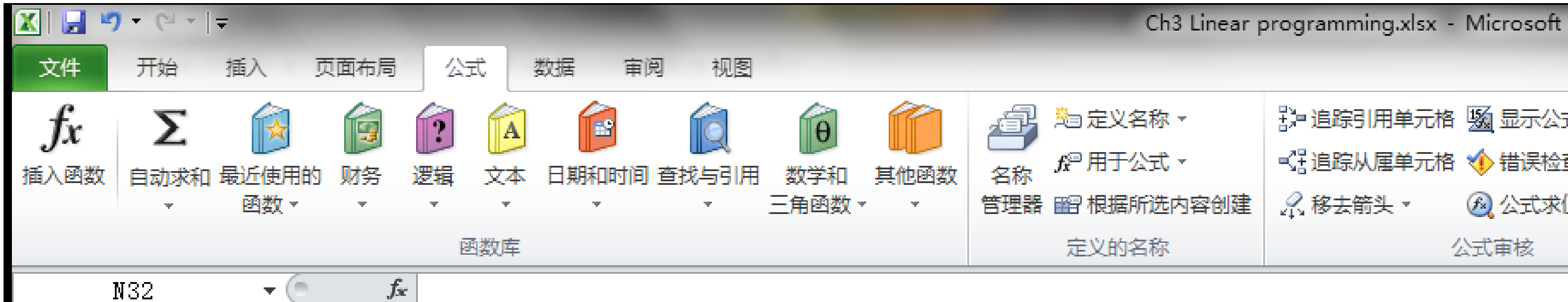
极限值报告

Microsoft Excel 12.0 极限值报告
工作表 [Ch2 Linear programming.xlsx]极限值报告 1
报告的建立：2010-3-29 12:10:49

单元格	目标式 名字	值
$C$7	Z = A型	265

单元格	变量 名字	值	下限 极限	目标式 结果	上限 极限	目标式 结果
$C$4	生产数量 A型	20	0	105	20	265
$D$4	生产数量 B型	15	0	160	15	265

“定义名称”和Excel函数



	A	B	C	D	E	F	G
1	决策变量						
2		产品型号	A型	B型			
3		生产数量	0	0			
4							
5		利润/产品	8	7			
6	目标函数	Z =	=SUMPRODUCT(生产数量,利润)				
7							
8	约束						
9					实际使用		资源限制
10		机器时间	3	2	=SUMPRODUCT(C10:D10,生产数量)	<=	90
11		劳动时间	1	2	=SUMPRODUCT(C11:D11,生产数量)	<=	50
12		产量限制	0	1	=SUMPRODUCT(C12:D12,生产数量)	<=	20
13							

第三章 线性规划模型
Linear Programming

第五节 多决策变量的规划模型

线性规划的应用非常广泛，一般教科书都采取分类讲解，如运输问题、配料问题、投资问题、生产计划、人力资源安排问题等。

不管什么问题，解决的办法都是一样的：

- 明确决策变量
- 确定目标函数
- 明确约束条件

然后，把求最优解和敏感性分析问题交给软件来完成。一般Excel的“规划求解”就足够。

专业软件是LINGO，可到如下网站下载：

http://www.lindo.com/

例一：人力资源分配的问题

百佳华商场是个中型的百货商场，它对售货员的需求经过统计分析如下表.为了保证售货员充分休息，售货员每周工作 5天，休息两天，并要求休息的两天是连续的。问应该如何安排售货员的工作时间，既满足工作需要，又使人力资本最节约?

时间	所需售货员人数
星期日	28
星期一	15
星期二	24
星期三	25
星期四	19
星期五	31
星期六	28

解：设 x_i (i = 1~7)表示星期一至日开始休息的人数，这样我们建立如下的数学模型。

目标函数：

$$\text{Min} \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$

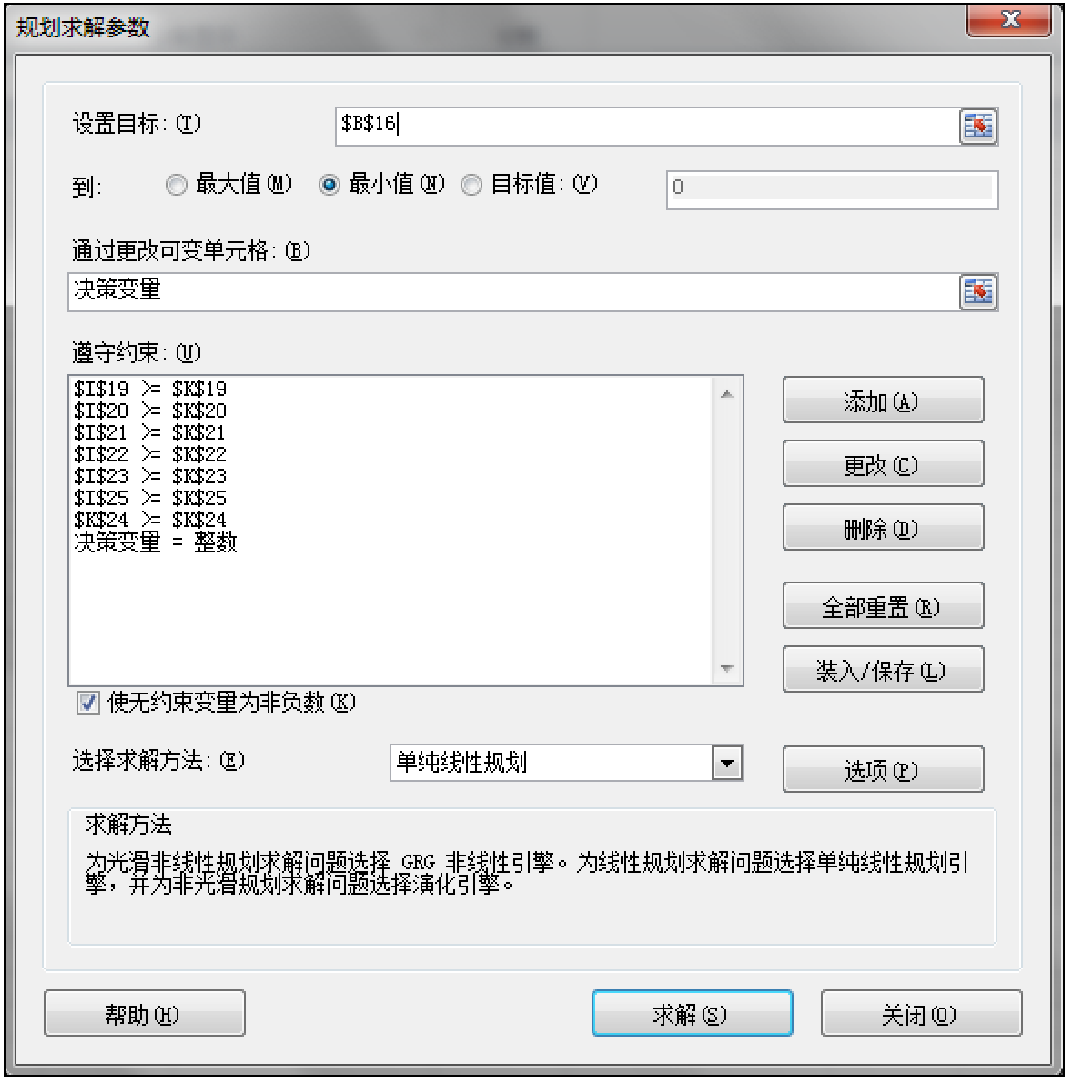
约束条件：

$$\begin{aligned}
\text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \geq 28 \\
& x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 15 \\
& x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \geq 24 \\
& x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_1 \geq 25 \\
& x_5 + x_6 + x_7 + x_1 + x_2 \geq 19 \\
& x_6 + x_7 + x_1 + x_2 + x_3 \geq 31 \\
& x_7 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 28 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0
\end{aligned}$$

Excel模型(设计)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	目标函数:										
2		Min x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6 + x7									
3	约束条件:										
4	s.t.	x1 + x2 + x3 + x4 + x5 ≥ 28									
5		x2 + x3 + x4 + x5 + x6 ≥ 15									
6		x3 + x4 + x5 + x6 + x7 ≥ 24									
7		x4 + x5 + x6 + x7 + x1 ≥ 25									
8		x5 + x6 + x7 + x1 + x2 ≥ 19									
9		x6 + x7 + x1 + x2 + x3 ≥ 31									
10		x7 + x1 + x2 + x3 + x4 ≥ 28									
11		x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7 ≥ 0									
12											
13	决策变量	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**	**x7**			
14		1	1	1	1	1	1	1			
15											
16	目标函数:	7									
17											
18	约束条件:								实际		约束
19	星期日	1	1	1	1	1	0	0	5	>=	28
20	星期一	0	1	1	1	1	1	0	5	>=	15
21	星期二	0	0	1	1	1	1	1	5	>=	24
22	星期三	1	0	0	1	1	1	1	5	>=	25
23	星期四	1	1	0	0	1	1	1	5	>=	19
24	星期五	1	1	1	0	0	1	1	5	>=	31
25	星期六	1	1	1	1	0	0	1	5	>=	28

规划求解参数


规划求解参数
设置目标：(T)
$B$16
到：
最大值 (M)
最小值 (N)
目标值：(V)
0
通过更改可变单元格：(B)
决策变量
遵守约束：(U)
$I$19 >= $K$19
$I$20 >= $K$20
$I$21 >= $K$21
$I$22 >= $K$22
$I$23 >= $K$23
$I$25 >= $K$25
$K$24 >= $K$24
决策变量 = 整数
添加 (A)
更改 (C)
删除 (D)
全部重置 (R)
装入/保存 (L)
使无约束变量为非负数 (K)
选择求解方法：(E)
单纯线性规划
选项 (P)
求解方法
为光滑非线性规划求解问题选择 GRG 非线性引擎。为线性规划求解问题选择单纯线性规划引擎，并为非光滑规划求解问题选择演化引擎。
帮助 (H)
求解 (S)
关闭 (O)

模型结果

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	目标函数：										
2		Min x1 + x2 + x3 + x4 + x5 + x6 + x7									
3	约束条件：										
4	s.t.	x1 + x2 + x3 + x4 + x5 ⩾ 28									
5		x2 + x3 + x4 + x5 + x6 ⩾ 15									
6		x3 + x4 + x5 + x6 + x7 ⩾ 24									
7		x4 + x5 + x6 + x7 + x1 ⩾ 25									
8		x5 + x6 + x7 + x1 + x2 ⩾ 19									
9		x6 + x7 + x1 + x2 + x3 ⩾ 31									
10		x7 + x1 + x2 + x3 + x4 ⩾ 28									
11		x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7 ⩾ 0									
12											
13	决策变量	**x1**	**x2**	**x3**	**x4**	**x5**	**x6**	**x7**			
14		12	0	11	5	0	8	0			
15											
16	目标函数：	36									
17											
18	约束条件：								实际		约束
19	星期日	1	1	1	1	1	0	0	28	>=	28
20	星期一	0	1	1	1	1	1	0	24	>=	15
21	星期二	0	0	1	1	1	1	1	24	>=	24
22	星期三	1	0	0	1	1	1	1	25	>=	25
23	星期四	1	1	0	0	1	1	1	20	>=	19
24	星期五	1	1	1	0	0	1	1	31	>=	31
25	星期六	1	1	1	1	0	0	1	28	>=	28

模型结果的分析与解释?

应该安排休息人数:
星期一：12人
星期三：11人
星期四：5人
星期六：8人

该商场总共最少需要聘用36名售货员。

例二：证券营业网点设置问题

长江证券公司提出下一年发展目标是：在全国范围内建立不超过12家营业网点，公司为此拨出专款2.2亿元人民币用于网点建设。

依据证券行业管理部门提供的有关数据，结合公司的市场调研，在全国选取20个主要城市并进行分类，每个网点的平均投资额（b）、年平均利润（c）及交易量占全国市场平均份额（r）均已知。

（1）为使网点布局更为科学合理，公司决定：

- 一类地区网点不少于2家，
- 二类地区网点不少于5家，
- 三类地区网点暂不多于6家。

例二：证券营业网点设置问题

（2）网点的建设不仅要考虑布局的合理性，而且应该有利于提升公司的市场份额，为此，公司提出，待12家网点均投入运营后，其市场份额应不低于10%。

（3）为保证网点筹建的顺利进行，公司审慎地从现有各部门中抽调出业务骨干40人用于筹建，分配方案为：一类地区每家网点4人，二类地区每家网点3人，三类地区每家网点2人。

试根据以上条件进行分析，公司下一年应选择哪些城市进行网点建设，既满足公司总体要求，又使年度利润总额最大。

全国20个主要城市市场调研数据

地区／类别	城市名称	编号	投资额(万元) (b_j)	利润额(万元) (c_j)	市场平均份额(%) (r_j)
一类地区	上海	1	2500	900	1.25
	深圳	2	2400	800	1.22
	北京	3	2300	700	1.20
	广州	4	2200	650	1.00
二类地区	大连	5	2000	550	0.96
	天津	6	2000	500	0.98
	重庆	7	1800	480	0.92
	武汉	8	1800	400	0.92
	杭州	9	1750	330	0.90
	成都	10	1700	300	0.92
	南京	11	1700	430	0.88
	沈阳	12	1600	250	0.82
	西安	13	1600	210	0.84
三类地区	福州	14	1600	180	0.86
	济南	15	1800	190	0.82
	哈尔滨	16	1900	165	0.75
	长沙	17	1550	180	0.78
	海口	18	1400	155	0.75
	石家庄	19	1500	144	0.72
	郑州	20	1200	147	0.70

建立模型

一、决策变量：

依次将城市设为X1, X2, X3,………X19, X20 ，

若选择城市j建立营业网点，记Xj=1, 否则记为Xj=0。

二、目标函数：Max = $\sum_{j=1}^{20} c_j X_j$

三、约束：

(1)在这20个城市最多建立12家营业网点：

$$\sum_{j=1}^{20} X_j \le 12$$

建立模型

(2）公司的总投资额不超过2.2亿，因此每个营业网点的投资额bj相加的总和小于等于22000（万元）：

$$\sum_{j=1}^{20} b_j X_j \le 22000$$

(3）在一类地区最少建立营业网点2家: $\sum_{j=1}^{4} X_j \ge 2$

二类地区: $\sum_{j=5}^{13} X_j \ge 5$

三类地区: $\sum_{j=14}^{20} X_j \le 6$

建立模型

(4) 营业网点运营后，总市场份额不低于10%：

$$\sum_{j=1}^{20} r_j X_J \geq 10$$

(5) 抽调出的40名业务骨干分配方案：一类地区每家网点4人，二类地区每家网点3人，三类地区每家网点2人。

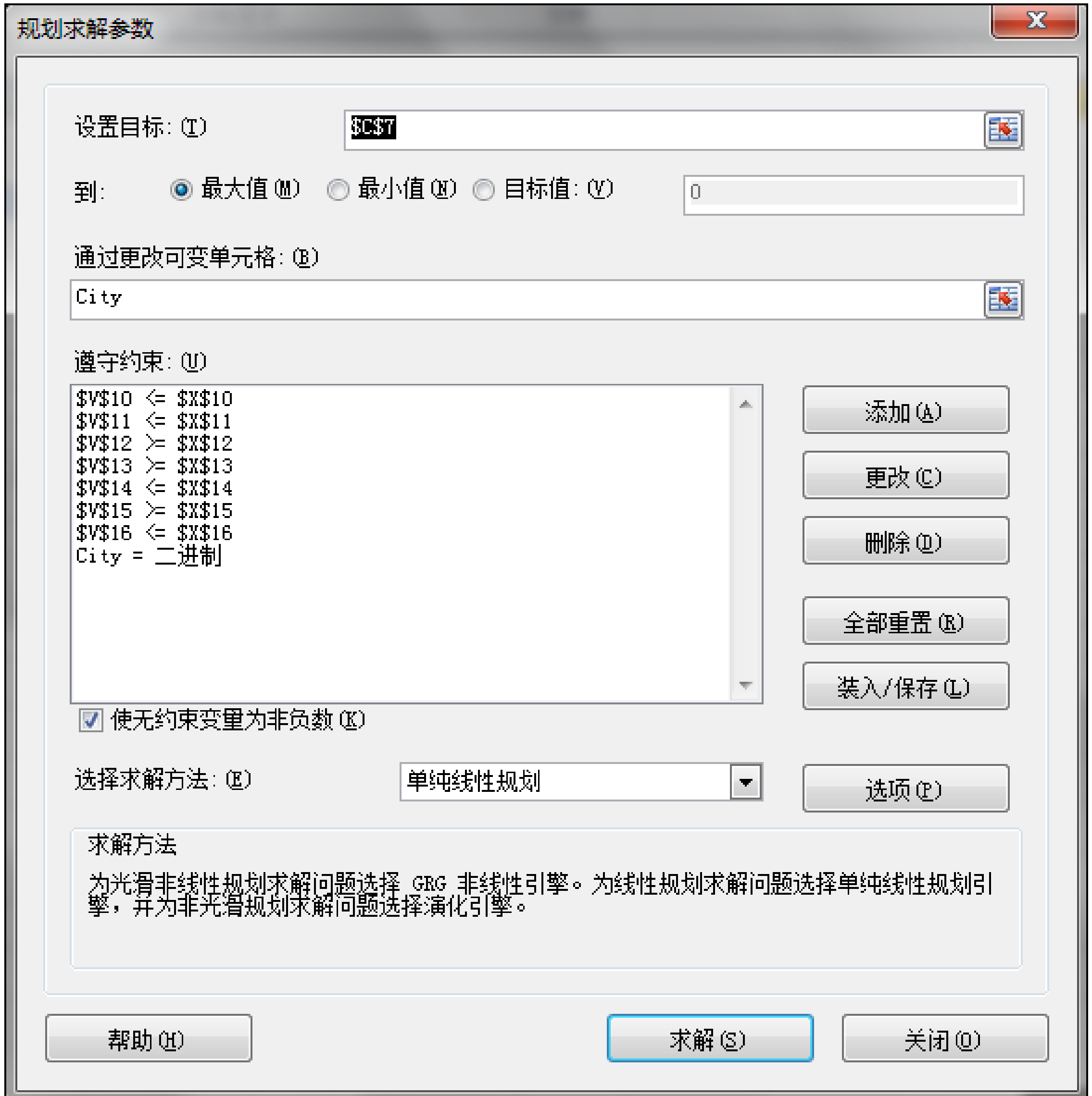
$$4*\sum_{j=1}^{4} X_j + 3*\sum_{j=5}^{13} X_j + 2*\sum_{j=14}^{20} X_j \leq 40$$

Excel建模（设计）

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
1																								
2	**决策变量**	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X11	X12	X13	X14	X15	X16	X17	X18	X19	X20			
3		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0			
4																								
5	**利润（Cj）**	900	800	700	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	300	430	250	210	180	190	165	180	155	144	147			
6																								
7	**目标函数**	Z =	0																					
8																								
9	**约束**																					实际使用		约束值
10	总数<=12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	<=	12
11	专款2.2亿	2500	2400	2300	2200	2000	2000	1800	1800	1750	1700	1700	1600	1600	1600	1800	1900	1550	1400	1500	1200	0	<=	22000
12	一类地区网点数	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	>=	2
13	二类地区网点数	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	>=	5
14	三类地区网点数	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	<=	6
15	市场份额	1.25	1.22	1.2	1	0.96	0.98	0.92	0.92	0.9	1	0.88	0.82	0.84	0.86	0.82	0.75	0.78	0.75	0.72	0.7	0	>=	10
16	筹建人员分配	4	4	4	4	3	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	0	<=	40

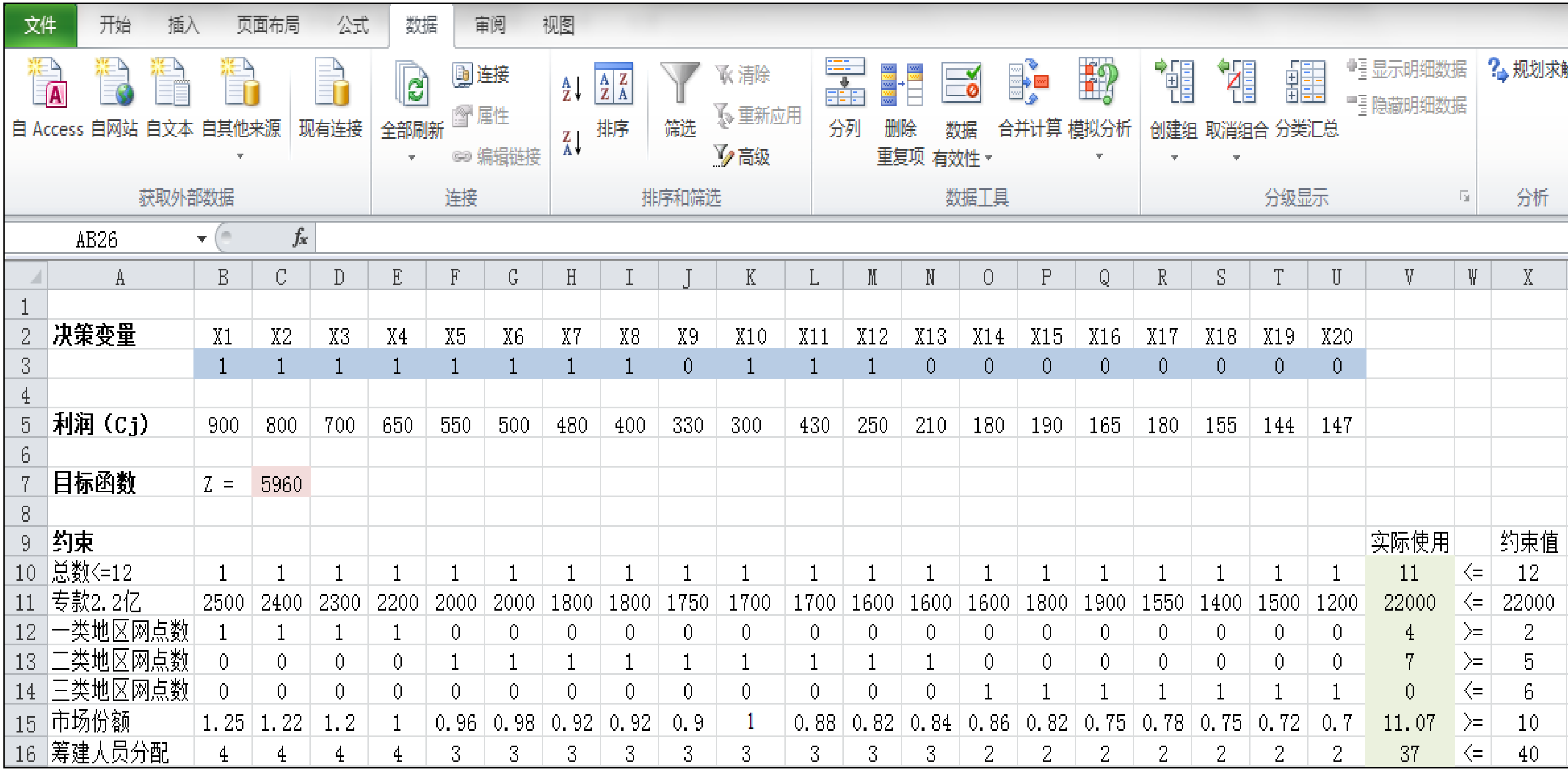
输入什么公式？

Excel建模（求解）



规划求解参数
设置目标：(T)
$C$7
到：
最大值(M)
最小值(N)
目标值：(V)
0
通过更改可变单元格：(B)
City
遵守约束：(U)
$V$10 <= $X$10
$V$11 <= $X$11
$V$12 >= $X$12
$V$13 >= $X$13
$V$14 <= $X$14
$V$15 >= $X$15
$V$16 <= $X$16
City = 二进制
添加(A)
更改(C)
删除(D)
全部重置(R)
装入/保存(L)
使无约束变量为非负数(K)
选择求解方法：(E)
单纯线性规划
选项(P)
求解方法
为光滑非线性规划求解问题选择 GRG 非线性引擎。为线性规划求解问题选择单纯线性规划引擎，并为非光滑规划求解问题选择演化引擎。
帮助(H)
求解(S)
关闭(O)

Excel建模（求解结果）



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
1																								
2	决策变量	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10	X11	X12	X13	X14	X15	X16	X17	X18	X19	X20			
3		1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0			
4																								
5	利润（Cj）	900	800	700	650	550	500	480	400	330	300	430	250	210	180	190	165	180	155	144	147			
6																								
7	目标函数	Z =	5960																					
8																								
9	约束																					实际使用		约束值
10	总数<=12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	11	<=	12
11	专款2.2亿	2500	2400	2300	2200	2000	2000	1800	1800	1750	1700	1700	1600	1600	1600	1800	1900	1550	1400	1500	1200	22000	<=	22000
12	一类地区网点数	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	>=	2
13	二类地区网点数	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	7	>=	5
14	三类地区网点数	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	<=	6
15	市场份额	1.25	1.22	1.2	1	0.96	0.98	0.92	0.92	0.9	1	0.88	0.82	0.84	0.86	0.82	0.75	0.78	0.75	0.72	0.7	11.07	>=	10
16	筹建人员分配	4	4	4	4	3	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	37	<=	40

Excel建模（结果解释）

最优解：

X1=X2=X3=X4=X5=X6=X7=X8=X10

=X11=X12=1, 其余全为0。

即最优方案为分别在

上海、深圳、北京、广州、大连、天津、重庆、武汉、成都、南京、沈阳

这11个城市建立营业网点。

此方案的年度总利润为5960万元。

本章小结

一、规划问题：在约束条件下求解目标函数的最优化

- 组成部分：决策变量；目标函数；约束条件
- 线性规划图解法：决策变量只有两个
  - 求解步骤：
    1. 根据约束条件确定可行域；
    2. 求解最优解，方法有两个，一是通过平移目标函数等值线，二是比较各个可行域顶角的目标函数值的大小；
    3. 对最优解的结果进行解释。

本章小结

二、线性规划模型的敏感性分析

1. 正确理解紧约束、松弛量、剩余量、影子价格和对偶价格等概念；
2. 资源约束的敏感性分析：是否紧约束，影子价格，约束资源的允许变化范围；
3. 目标函数系数的敏感性分析：目标函数系数在什么范围内变化时，模型的最优解不变。

本章小结

三、利用Excel的规划求解(Solver)求解线性规划问题

- 正确建立Excel电子表格模型
  - 指明模型的三个组成部分
  - 正确输入Excel函数
- 正确求解
  - 正确选择参数：设置目标；可变单元格；约束
  - 指明变量是否非负
  - 指明求解方法：线性 or 非线性?

四、善于应用线性规划解决实际问题

- 多变量规划模型
- 整数规划
- 等等

课堂讨论

1. 线性规划模型包含哪几个组成部分？具体内容有哪些?
2. 影子价格和对偶价格的含义，如何计算?
3. 对线性规划模型进行敏感性分析，可从哪些方面着手?

实践问题一：桌子椅子生产问题

一家具厂只生产桌子和椅子。已知生产一张桌子需要消耗4公斤木料，2小时的机器时间和1小时的油漆抛光时间；而生产一张椅子则需要消耗1公斤木料，1小时的机器时间和1小时的油漆抛光时间。

该家具厂每周最多只能提供90公斤木料，50小时的机器时间和40小时的抛光时间。已知市场上每售出一张桌子有40元的利润，售出一张椅子有30元的利润。

实践问题一：桌子椅子生产问题

回答如下问题（用图解法）：

（1）写出完整的线性规划模型；

（2）在Excel中画出可行域；

（3）求出各顶角坐标及目标函数值，求出最优解；

（4）判断各个约束是否紧约束，并计算各约束的松弛量；

（5）各个约束的影子价格；

（6）各个约束右边约束值的允许变化范围；

（7）目标函数系数的允许变化范围。

实践问题二：最优广告方案

某俱乐部准备推广一项赌场的博彩，每周用于地方广告的预算为8000美元。广告预算将分配给四种促销媒体：电视短片、报纸广告和两种电台广告。俱乐部管理层经过研究，为了扩大影响范围，决定每周至少播放5条电台广告片段，且每周在电台广告方面投资不超过1800美元。该俱乐部的目标是通过各种媒体覆盖到更多的高购买潜力的受众。请为该俱乐部设计搞广告的最优方案。

俱乐部的广告预算表

媒体	每条广告受众	每条广告的成本（美元）	每周最大广告量
电视短片（1分钟）	5000	800	12
日报（整页广告）	8500	925	5
电台广告片段（30秒，黄金时间）	2400	290	25
电台广告片段（1分钟，下午）	2800	380	20

实践问题三：最佳组合问题

某地游泳队参加混合泳接力赛，比赛由蛙泳、蝶泳、自由泳、仰泳组成。如何根据4位运动员的4种游泳竞赛成绩安排混合泳接力队，以取得最佳成绩?

	蛙泳	自由泳	蝶泳	仰泳
甲	79	93	65	87
乙	99	59	60	73
丙	67	63	93	81
丁	56	86	79	76