

# 作业 5：贝叶斯计算：MCMC 算法

姓名（学号）

## 第 1 题：Rejection Sampling

假设总体分布为  $Y \sim N(\theta, 1)$ ，先验分布为  $\theta \sim \text{Cauchy}(0, 1)$ 。

(一) 记  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$  为来自总体  $N(\theta, 1)$  的样本观察值，写出  $\theta$  的后验密度函数  $p(\theta|\mathbf{y})$ ；

(二) 现假设参数真值为  $\theta = 2$ ，即总体  $Y \sim N(2, 1)$ ，请从总体  $N(2, 1)$  中随机抽取  $n = 5$  个样本观察值（Seed number 取 123456）；

(三) 根据（二）中所抽取的样本观察值和（一）中的后验密度函数  $p(\theta|\mathbf{y})$ ，应用 Rejection Sampling 抽样法，试从后验分布  $p(\theta|\mathbf{y})$  中抽取 1000 个样本（提示：源密度  $g(\theta)$  可以取  $N(\bar{y}, s^2)$ ，常数取  $c = \max[p(\theta|\mathbf{y})/g(\theta)]$ ）；

(四) 根据（三）中所抽取的后验分布样本值，计算  $\theta$  的贝叶斯点估计，并给出估计误差；

(五) 根据（三）中所抽取的后验样本值，做出后验密度函数  $p(\theta|\mathbf{y})$  的直方图和密度曲线图。

## 第 2 题：Gibbs Sampler

假设总体分布为  $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ ， $\mu$  和  $\sigma^2$  未知。先验分布为

$$\mu|\sigma^2 \sim N\left(\mu_0, \frac{\sigma^2}{k_0}\right), \sigma^2 \sim \text{Inv} - \chi^2(\nu_0, \sigma_0^2).$$

(一) 记  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$  为来自总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的样本观察值，试求  $\mu$  的条件后验分布  $p(\mu|\sigma^2, \mathbf{y})$  和方差  $\sigma^2$  的后验分布  $p(\sigma^2|\mathbf{y})$ ；

(二) 试从总体  $N(10, 5^2)$  中随机抽取  $n = 50$  个样本观察值（即总体的参数真值为  $\mu = 10, \sigma = 5$ ）（取 Seed number 为 123456）；

(三) 根据（二）中所抽取的样本值，应用 Gibbs 抽样法，试从总体参数的后验分布中抽取  $N = 2000$  个 MCMC 样本（其中先验分布中  $\mu_0 = 0, k_0 = 1, \nu_0 = 5, \sigma_0 = 1$ ）；

(四) 根据（三）中所抽取的 MCMC 样本，舍去前面 1000 个（Burn-in），利用后面 1000 个 MCMC 样本计算  $\mu$  和  $\sigma^2$  的贝叶斯点估计，并给出估计误差；

(五) 根据（三）中所抽取的 MCMC 样本，舍去前面 1000 个（Burn-in），做出  $\mu$  和  $\sigma^2$  的后验分布直方图。