

作业 4：先验分布的选择

姓名（学号）

第 1 题

从大学生中随机抽取 100 人进行投篮训练。首先让他们每人投 100 次，记录他们的命中率作为基数。然后让他们每天练习 50 次，一个月后，再让每个人投篮 100 次，记 θ 为命中率的平均提高值。

给出 θ 的如下三种先验分布（给出理由）：

- (一) 无信息先验 (noninformative prior);
- (二) 根据你的经验，给出一个比较主观的先验分布 (subjective prior);
- (三) 给出一个弱信息先验 (weakly informative prior)。

第 2 题

假设 $X_i (i = 1, \dots, n)$ 为来自指数分布的独立同分布样本，其 pdf 为

$$f(x|\theta) = \theta^{-1} e^{-x/\theta}, \theta > 0, x > 0.$$

- (一) 推导关于 θ 的 Jeffreys 先验分布，并求出其后验分布；
- (二) 推导关于 $\lambda = \theta^{-1}$ 的 Jeffreys 先验分布，并求出其后验分布；

第 3 题

假设 $Y \sim \text{Poisson}(N\lambda)$ ，其中 N 是总体单位数（已知）。

- (一) 试求 λ 的 Jeffreys 先验分布。该先验是否正常分布？其相应的后验分布是否正常分布？
- (二) 试求 λ 的共轭先验分布，并求相应的后验分布；
- (三) 已知 $N = 100, Y = 7$ 。在 Jeffreys 先验分布下，试求 λ 的 95% 可信区间（等尾）和最高后验密度区间 (HPD)。两个区间有何区别？

第 4 题

设 $X_i (i = 1, \dots, n)$ 为 iid 样本，对如下贝叶斯模型：

- (a) $x|\sigma^2 \sim N(0, \sigma^2), 1/\sigma^2 \sim \text{Gamma}(1, 2)$
- (b) $x|\lambda \sim P(\lambda), \lambda \sim \text{Gamma}(2, 1)$;
- (c) $x|p \sim \text{NB}(10, p), p \sim \text{Beta}(0.5, 0.5)$ 。

- (一) 分别求出各参数的后验分布；
- (二) 分别求出各参数的 Jeffreys 先验分布。