

作业 3：正态分布的贝叶斯推断

姓名（学号）

2019 年 03 月 28 日

一、某市目前有两万多家私募基金机构，假设这些机构募集到的资金额总体服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 。现从中随机抽取若干家机构进行调查，发现这些机构募集到的资金额分别为 1.64, 1.70, 1.72, 1.74, 1.82, 1.82, 1.82, 1.90, 2.08（单位：亿元）。（要求写出推导过程、计算代码和计算结果。）

（一）假设总体方差为已知且 $\sigma^2 = 0.01$ 。前期已有权威机构发布调查报告，称平均募集资金的 95% 置信区间为 (1.3, 2.5)，以此为先验信息。

1. 建立正态-正态贝叶斯模型；
2. 给出 μ 的后验分布；
3. 计算 μ 的 95% 最高后验密度区间 HPD；
4. 在同一幅图上做出 μ 的先验密度、后验密度和似然函数的曲线图。

（二）假设 (μ, σ^2) 均未知，给定其先验分布如下：

$$\begin{aligned}\pi(\sigma^2) &\propto (\sigma^2)^{-(\alpha+1)} e^{-\beta/\sigma^2} \\ \pi(\mu|\sigma^2) &\propto (\sigma^2)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2/k_0}(\mu-\delta)^2}\end{aligned}$$

以往研究显示 $E[\sigma^2] = 0.02$, $\text{var}[\sigma^2] = 0.005^2$ 。取 $k_0 = 1$, δ 的取值可参考在（一）给出的先验信息。

1. 写出 (μ, σ^2) 的联合后验分布的密度函数；
2. 给出 σ^2 的边缘后验分布，计算 σ^2 的点估计和可信区间估计；
3. 给出 μ 的边缘后验分布，计算 μ 的点估计和可信区间估计；
4. 在同一幅图上做出 μ 的先验密度、后验密度和似然函数的曲线图。

（三）假设 (μ, σ^2) 均未知，其先验分布为无信息先验，即

$$\pi(\mu, \sigma^2) \propto 1/\sigma^2$$

1. 写出 (μ, σ^2) 的联合后验分布的密度函数；
2. 给出 σ^2 的边缘后验分布，计算 σ^2 的点估计和可信区间估计；
3. 给出 μ 的边缘后验分布，计算 μ 的点估计和可信区间估计；
4. 比较（二）和（三）的结果。

二、假设总体 $X \sim N(\mu, \mu)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 为来自该总体的一个样本观察值，试求参数 μ 的共轭先验分布。

三、教材第 89 页，第 3.6 题。