

作业 2：贝叶斯模型及推断

姓名（学号）

2019 年 04 月 02 日

一、假设 θ 的后验分布为 $N(1, 3)$ ，计算其 99% 最高后验密度区间 (HPD)。

二、假设数据 $[1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1]$ 来自一个独立同分布的贝努利试验，每次试验中出现 1 的概率都是 p ，假设 p 的先验分布为均匀分布。

1. 试求 p 的 $(1 - \alpha)100\%$ 最高后验密度区间 (HPD)；
2. 计算当 $\alpha = 0.01, 0.05, 0.10$ 时 HPD 的具体值；
3. 假设安排一次新的贝努利试验，试求试验结果的预测分布。

三、设 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 为来自指数分布 $X \sim \text{Exp}(\theta)$ 的样本观察值，其 pdf 为

$$f(x|\theta) = \theta^{-1}e^{-x/\theta} (x > 0; \theta > 0),$$

1. 证明参数 θ 的最大似然估计量和矩估计量都是样本均值 \bar{X} ；
2. 求参数 θ 的共轭先验分布；
3. 假设 θ 的先验分布为逆伽玛分布： $\theta \sim \text{IG}(1, \beta)$ ，试求后验分布；
4. 求出 θ 的后验分布的数学期望 $\hat{\theta} = E(\theta|\mathbf{x})$ (作为贝叶斯估计量)；
5. 比较样本均值 \bar{X} 和贝叶斯估计 $\hat{\theta}$ 的均方误差 MSE。